

1. Rozwiązać równanie Schrödingera dla bariery potencjału:

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & \text{dla } |x| \leq a \\ 0, & \text{dla } |x| > a. \end{cases}$$

Znaleźć współczynniki transmisji  $T$  oraz odbicia  $R$  dla tego problemu.

2. Przyjmując definicję wielomianów Hermite'a przy pomocy wzoru Rodriguesa

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2},$$

pokazać, że wielomiany te spełniają następujące równanie różniczkowe (opisujące oscylator harmoniczny)

$$\frac{d^2}{dx^2} H_n(x) - 2x \frac{d}{dx} H_n(x) + 2n H_n(x) = 0.$$

3. Pokazać, że niehermitowskie operatory

$$\begin{aligned} \hat{a} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} + \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \right), \\ \hat{a}^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{x} - \frac{i\hat{p}}{\sqrt{m\omega\hbar}} \right), \end{aligned}$$

spełniają relację komutacji

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1.$$