1. Znaleźć postać operatorów momentu pędu $\hat{L}_1, \hat{L}_2, \hat{L}_3$ w układzie sferycznym i pokazać, że

$$\begin{aligned}
\underline{\hat{L}}^2 &= \hat{L}_1^2 + \hat{L}_2^2 + \hat{L}_3^2 \\
&= -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\Theta} \frac{\partial}{\partial\Theta} \left(\sin\Theta \frac{\partial}{\partial\Theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\Theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right] \\
\hat{L}_\pm &= \hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial\Theta} + i \cot\Theta \frac{\partial}{\partial\phi} \right)
\end{aligned}$$

2. Udowodnić, że

$$I_1(l) = \int_0^1 dx (1-x)^l = \frac{2^l l!}{(2l+1)!}.$$

3. Wykorzystując dowód indukcyjny pokazać prawdziwość relacji

$$\left(\frac{\hat{L}_-}{\hbar} \right)^{l-m} |ll> = \sqrt{\frac{(2l)!(l-m)!}{(l+m)!}}\, |lm>,$$

gdzie $m < l$, $m \geq -l$, oraz, że

$$\left(\frac{\hat{L}_-}{\hbar} \right) e^{il\phi} (\sin\Theta)^l = \frac{e^{i(l-k)\phi}}{(\sin\Theta)^{l-k}} \frac{d^k}{d(\cos\Theta)^k} (\sin\Theta)^{2l}.$$

4. Wykorzystując wzór Rodriguesa definiujący wielomiany Legendre'a

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2-1)^n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^2}{dx^n} (1-x^2)^n,$$

znaleźć pierwszych pięć wielomianów Legendre'a $P_0, ..., P_4$. Stowarzyszone funkcje Legendre'a określone są na przedziale (-1,1) wzorem

$$P_l^m(x) = \frac{1}{2^l l!} (\sqrt{1-x^2})^m \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l.$$

Pokazać, że związek harmonik sferycznych ze stowarzyszonymi funkcjami Legendre'a jest następujący

$$Y_{lm}(\Theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_l^m(\cos\Theta)$$

gdzie $0 \leq m \leq l$.

5. Obliczyć współrzędną radialną, odpowiadającą maksymalnej wartości radialnej gęstości prawdopodobieństwa dla podstawowego stanu atomu wodoru ($\Psi_{100} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$) i obliczyć wartość oczekiwaną dla współrzędnej radialnej w tym stanie.