

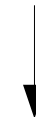
Kinematyka, układ CM

- Można pokazać, że dla procesu n cząstek $\rightarrow m$ cząstek, liczba niezależnych parametrów wynosi ... (zasady zachowania)
- Dla procesu $2 \rightarrow 2$, wprowadzamy często 3 zmienne kinematyczne (choć tylko 2 niezależne), są to tzw. Zmienne Mandelstama (p_i to czteropędy)

$$s = (p_a + p_b)^2$$

$$t = (p_a - p_c)^2$$

$$u = (p_a - p_d)^2$$

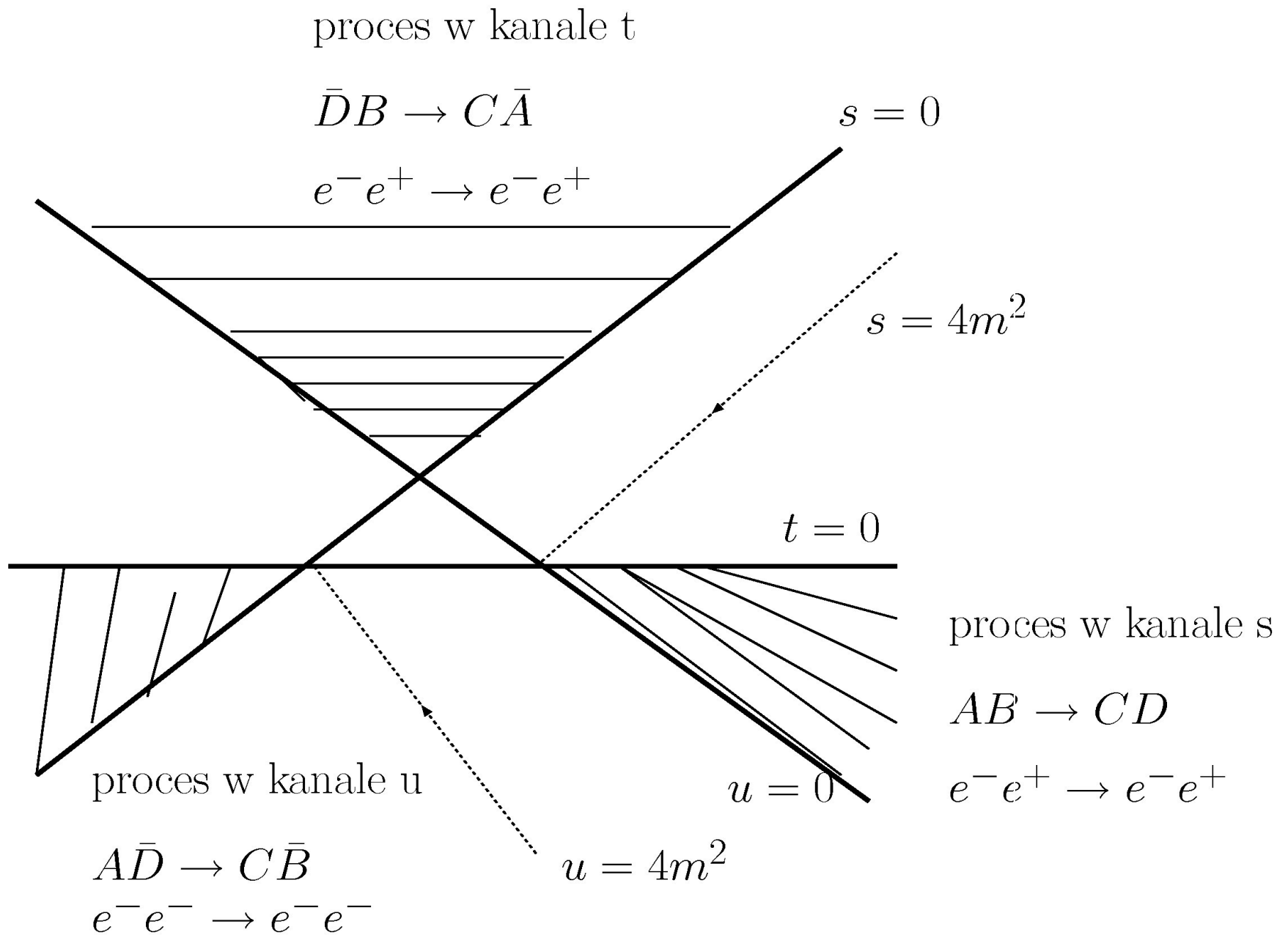


Plus $s=(p_c+p_d)^2$ itd ...

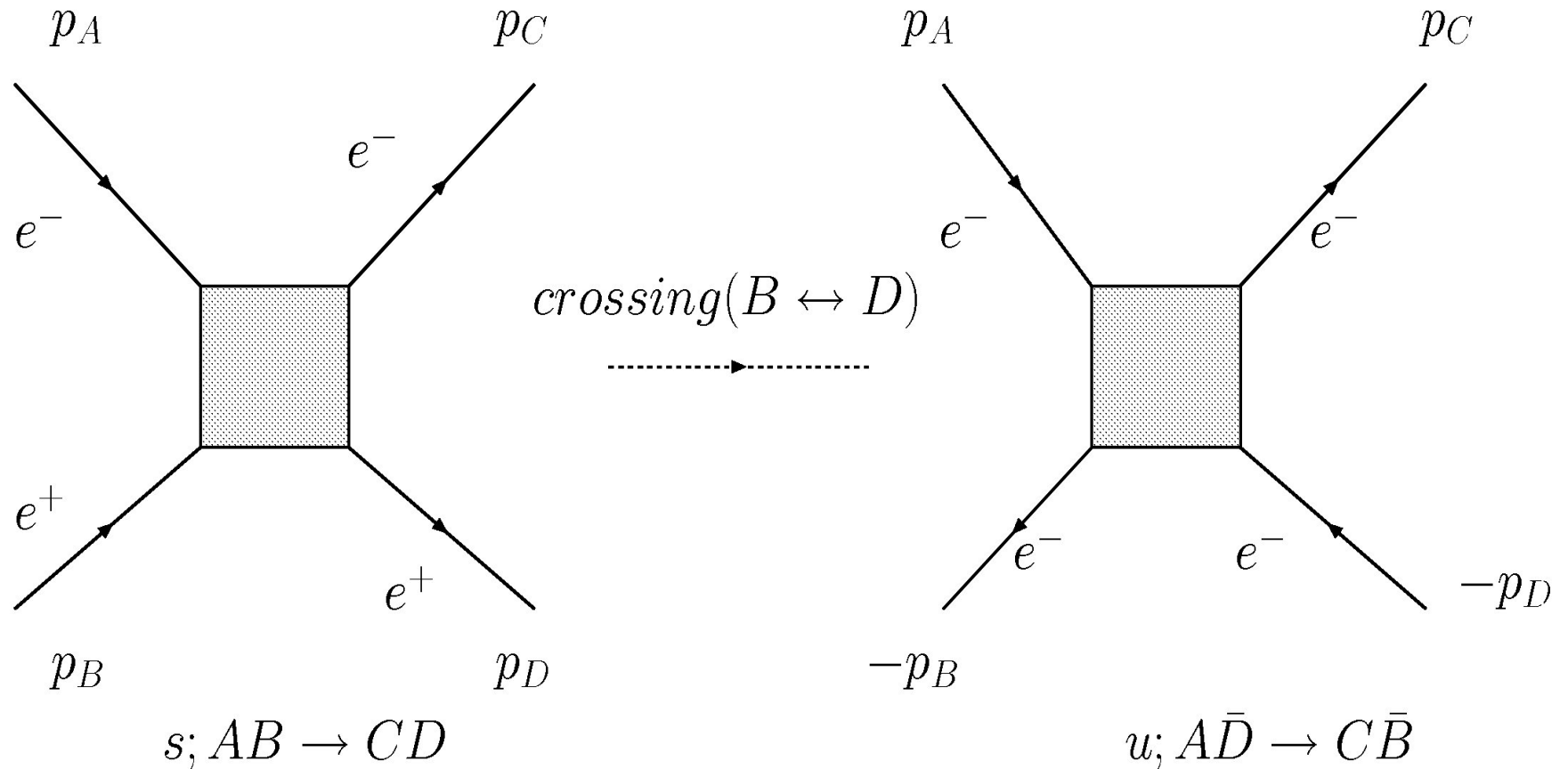
zależność między nimi określa relacja

$$s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$$

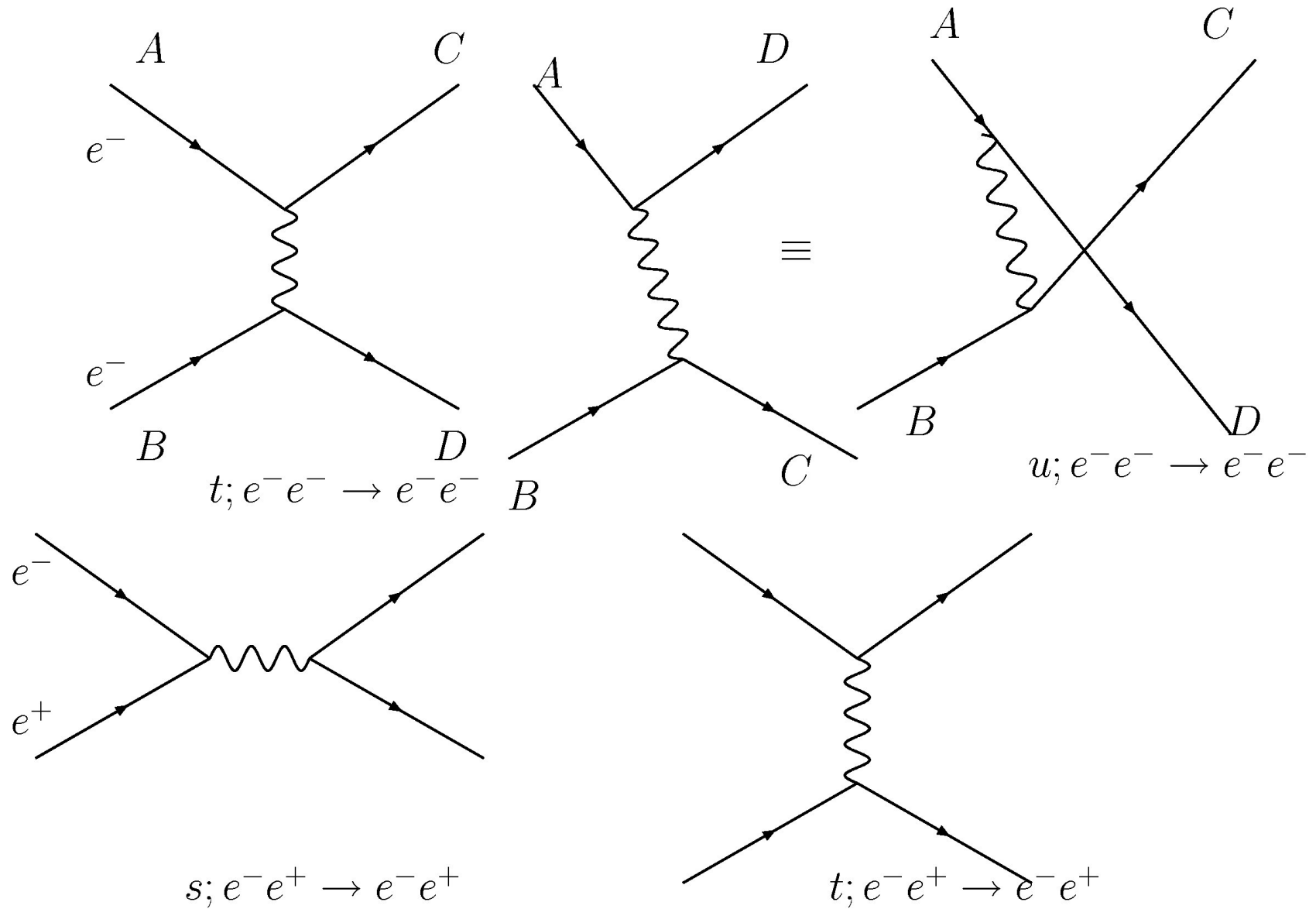
Użyteczność zmiennych s, t, u : symetria



Graficznie: $B \leftrightarrow D \Leftrightarrow s \leftrightarrow u$



Amplitudy: graficznie



Amplitudy: matematycznie

Trzeba zmienić kierunek linii pozytronów B,D by zastosować regułę Feynmana (prąd w tym samym kierunku)

$$-iM_{e^-e^-} = -i \left(-e^2 \frac{(p_A + p_C)_\mu (p_B + p_D)^\mu}{(p_D - p_B)^2} - e^2 \frac{(p_A + p_D)_\mu (p_B + p_C)^\mu}{(p_C - p_B)^2} \right)$$

$$-iM_{e^-e^+} = -i \left(-e^2 \frac{(p_A + p_C)_\mu (-p_B - p_D)^\mu}{(p_D - p_B)^2} - e^2 \frac{(p_A - p_B)_\mu (-p_D + p_C)^\mu}{(p_C + p_D)^2} \right)$$

$$M_{e^-e^+}(p_A, p_B, p_C, p_D) = M_{e^-e^-}(p_A \leftrightarrow -p_D, p_C \leftrightarrow -p_B)$$

$$M_{e^-e^+} = e^2 \left(\frac{s-u}{t} + \frac{t-u}{s} \right)$$

$$M_{e^-e^-} = e^2 \left(-\frac{s-u}{t} + \frac{t-s}{u} \right)$$

$$e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+ :$$

$$|M|^2 = 2\frac{e^4}{s^2}[t^2 + u^2 + 2(m^2 + M^2)(s - t - u) + 2(m^2 + M^2)^2]$$

$$|M|^2 = 2\frac{e^4[t^2 + u^2 + 2]}{s^2}$$

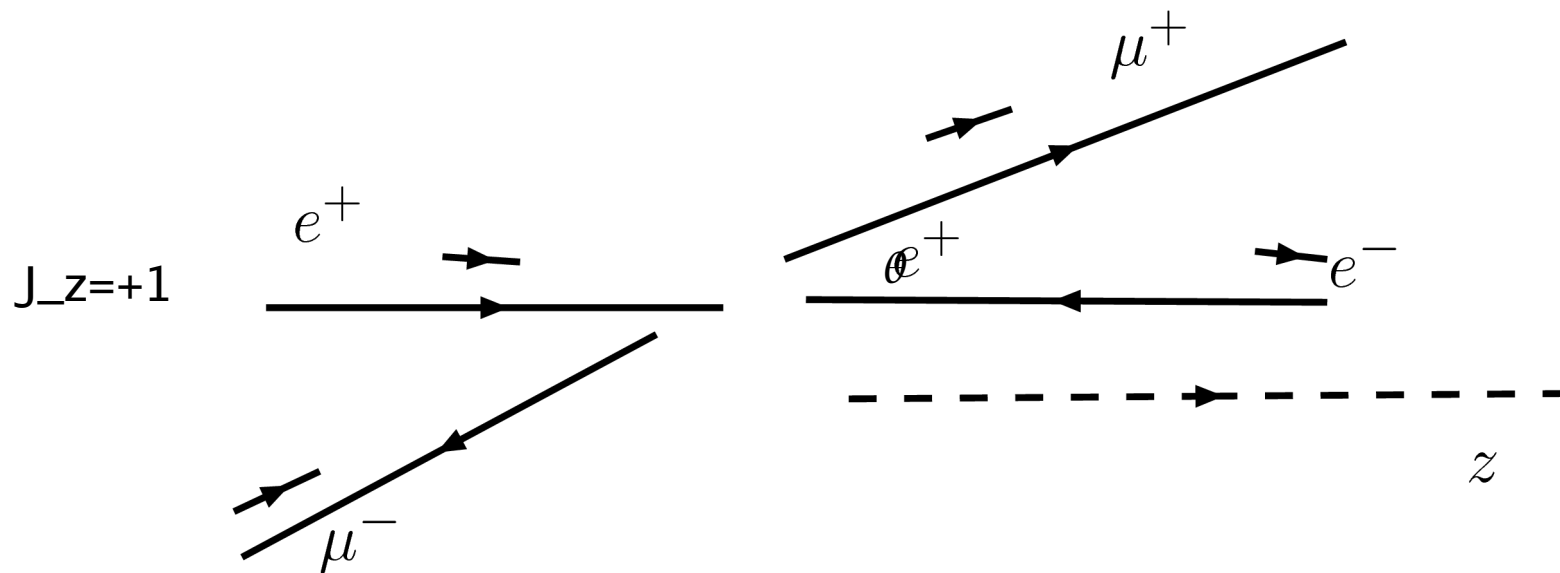
← Zanedbując masy

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{CM} = \frac{\alpha^2}{4s}(1 + \cos^2\Theta)$$

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Wynik można zrozumieć biorąc pod uwagę zachowanie skrętności !

Biorąc pod uwagę prosty związek z kątem rozpraszania i całkując po kątach



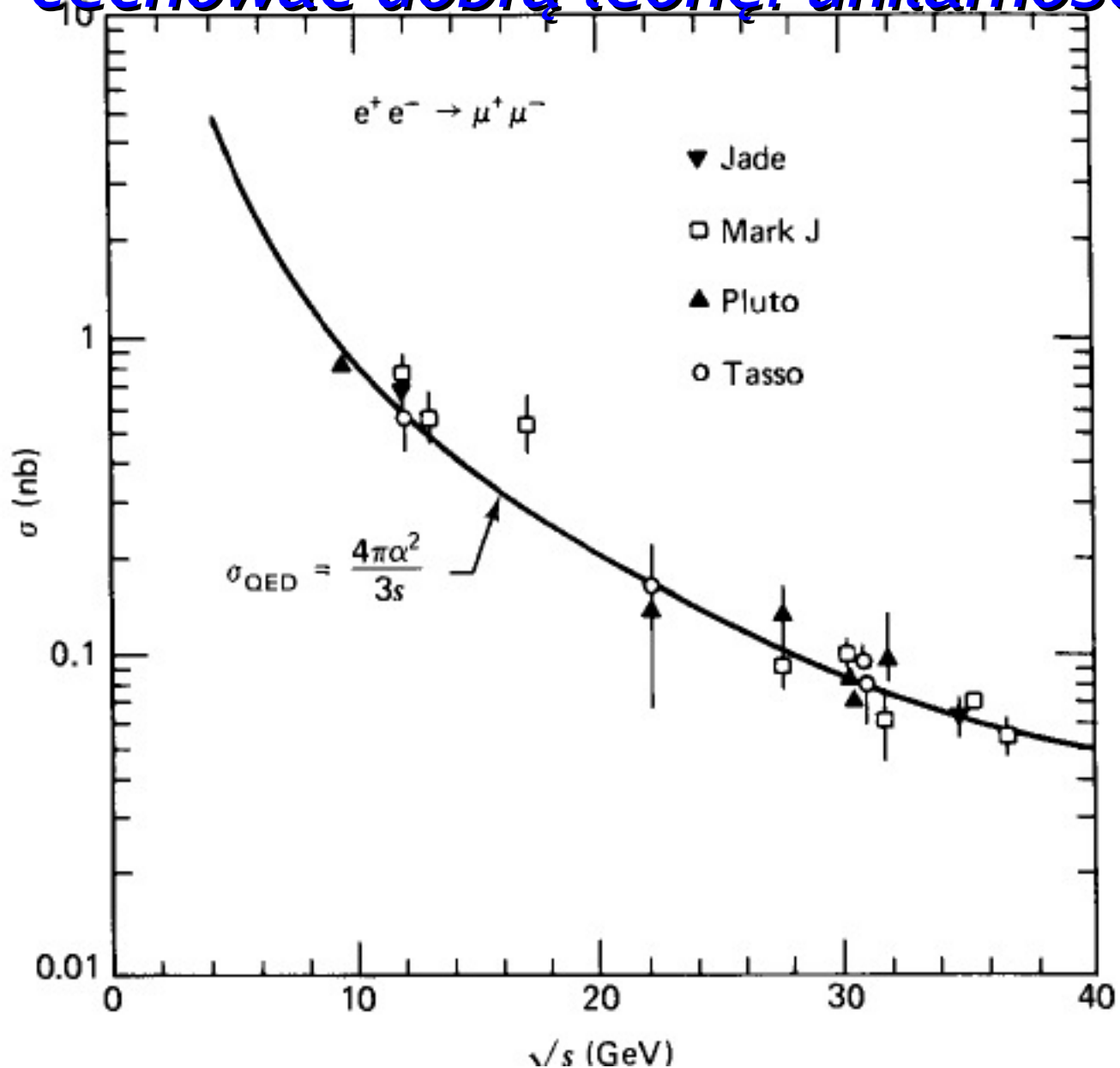
Prawdopodobieństwo, że stan końcowy też $J_z = +1$

$$J_z = +1 : d_{1,1}^1(\Theta) = \frac{1 + \cos \Theta}{2}$$

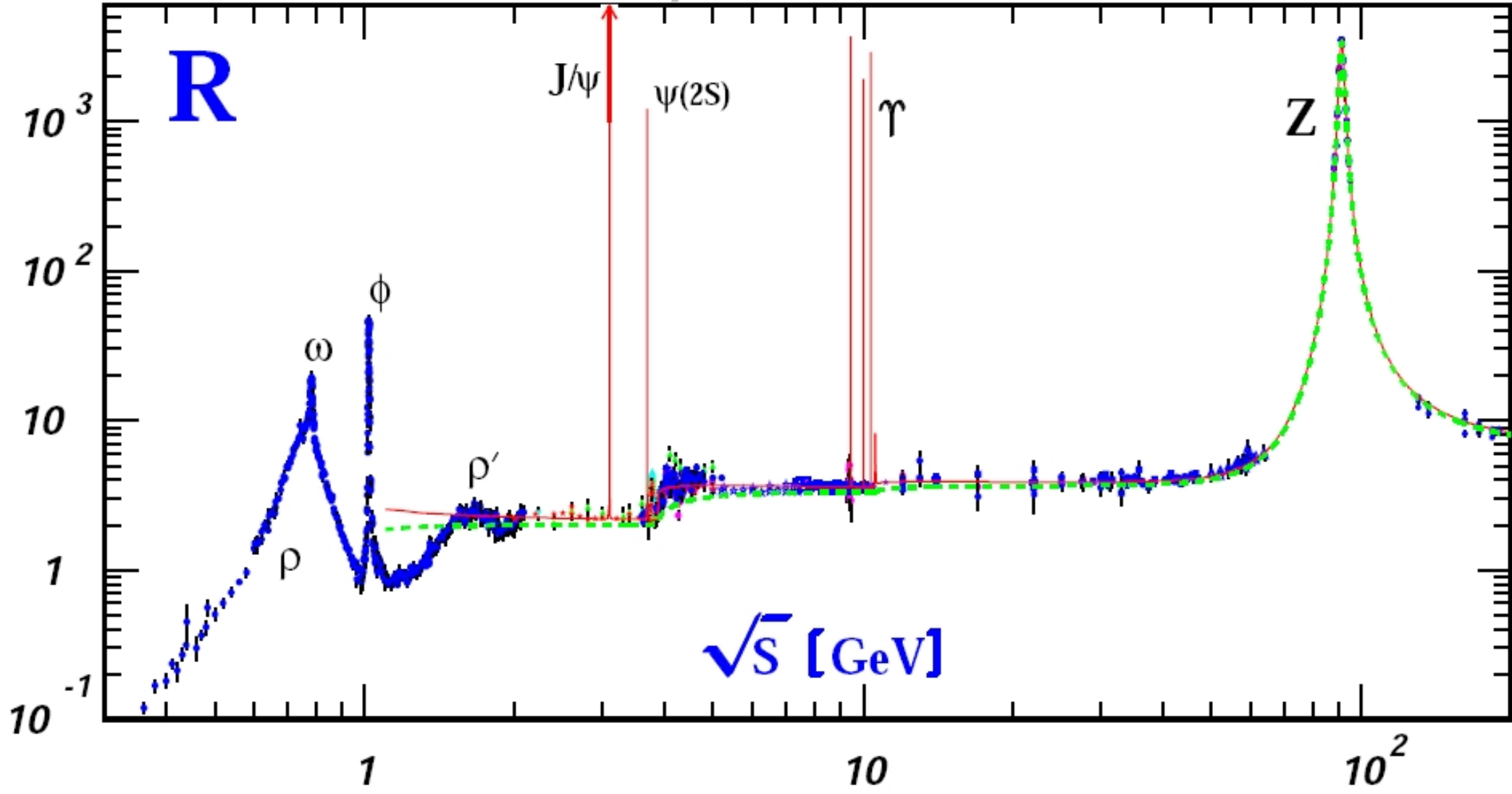
$$J_z = -1 : d_{1,-1}^1(\Theta) = \frac{1 - \cos \Theta}{2}$$

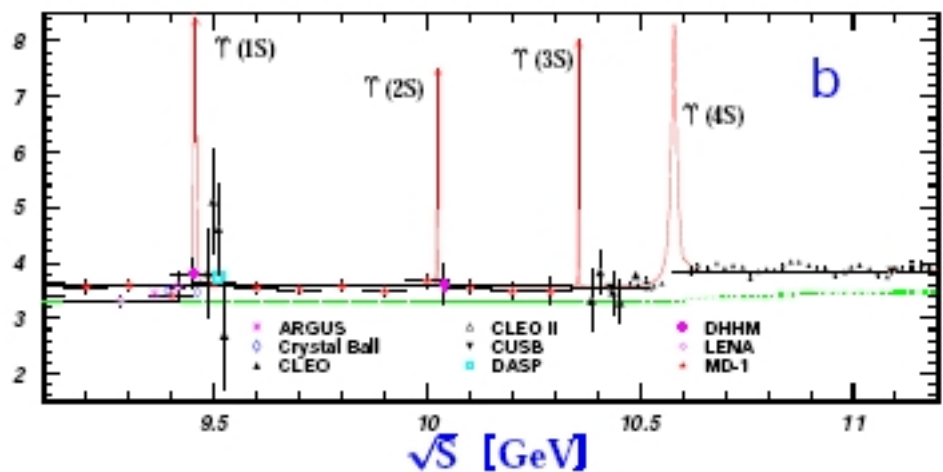
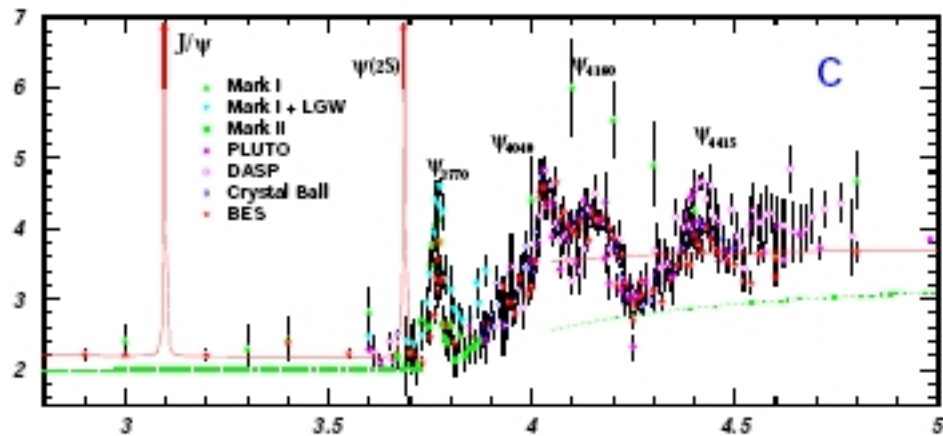
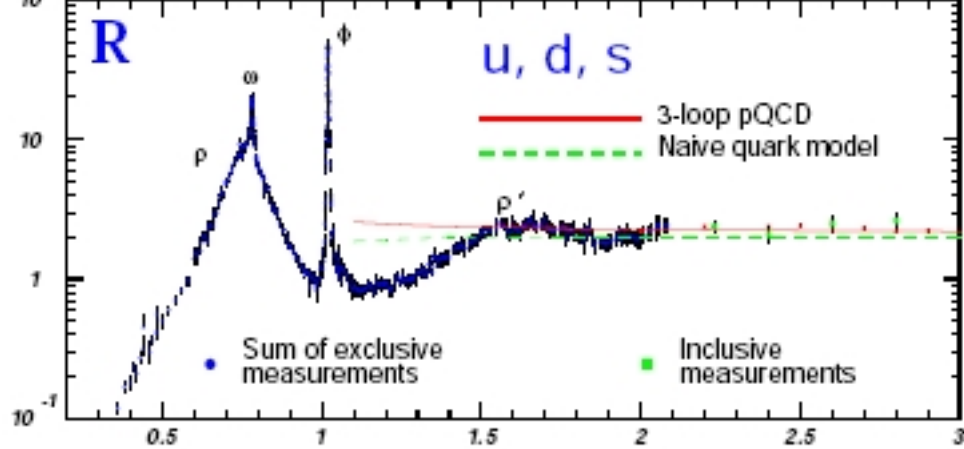
Gdy weźmiemy sumę kwadratów,
uzyskamy wynik z poprzedniego slajdu

Takie zachowanie (spadek z energią) musi cechować dobrą teorię: unitarność



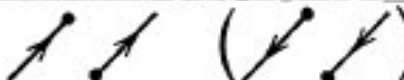


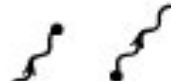






Rozpraszanie e^-e^+ : w ogólności bardzo skomplikowane!





hep-ph/0312114

Podstawowe reguły Feynmana

		Multiplicative Factor	
● External Lines	Spin 0 boson (or antiboson)		1
	Spin 1/2 fermion (in, out)		u, \bar{u}
	antifermion (in, out)		\bar{v}, v
	Spin 1 photon (in, out)		$\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$
● Internal Lines—Propagators (need +iε prescription)	Spin 0 boson		$\frac{i}{p^2 - m^2}$
	Spin 1/2 fermion		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
	Massive spin 1 boson		$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
	Massless spin 1 photon (Feynman gauge)		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
● Vertex Factors	Photon—spin 0 (charge -e)		$ie(p + p')^\mu$
	Photon—spin 1/2 (charge -e)		$ie\gamma^\mu$

Loops: $\int d^4k / (2\pi)^4$ over loop momentum; include -1 if fermion loop and take the trace of associated γ -matrices

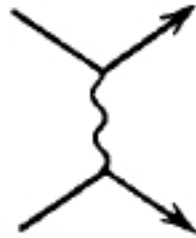
Identical Fermions: -1 between diagrams which differ only in $e^- \leftrightarrow e^-$ or initial $e^- \leftrightarrow$ final e^+

Masy zaniedbane

Møller scattering

$$e^- e^- \rightarrow e^- e^-$$

Forward peak



Backward peak



Forward Interference Backward

$$\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2 + t^2}{u^2}$$

($u \leftrightarrow t$ symmetric)

(Crossing $s \leftrightarrow u$)

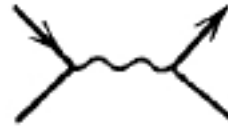
Forward

"Time-like"

Forward Interference Time-like

Bhabha scattering

$$e^- e^+ \rightarrow e^- e^+$$



$$\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} + \frac{u^2 + t^2}{s^2}$$

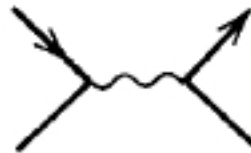
$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$$



$$\frac{s^2 + u^2}{t^2}$$

(Crossing $s \leftrightarrow t$)

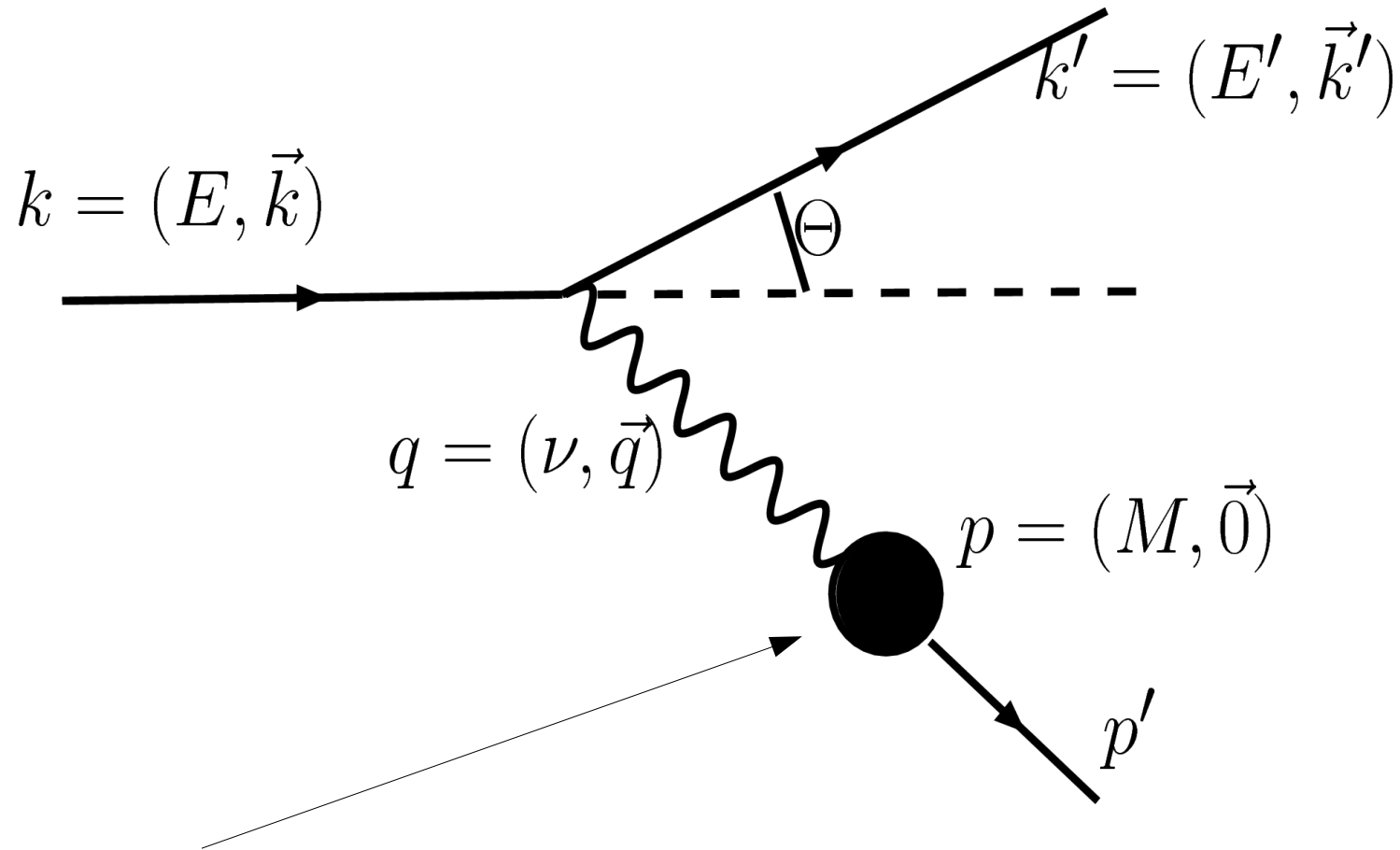
$$e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$$



$$\frac{u^2 + t^2}{s^2}$$

Podstawowe procesy dla QED

Obliczenie w układzie LAB



Tarcza spoczywająca

Pokazałem już (W9) jak przejść do śladów

$$\begin{aligned}
 & |M|_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}^2 = \\
 &= \frac{8e^4}{q^4} [(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') \\
 &\quad - m^2 p' \cdot p - M^2 k' \cdot k + 2m^2 M^2] \\
 &= \frac{8e^4}{q^4} [(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') - M^2 k' \cdot k] \\
 &= \frac{8e^4}{q^4} \left[-\frac{1}{2} q^2 (k \cdot p - k' \cdot p) + 2(k' \cdot p)(k \cdot p) + \frac{1}{2} M^2 q^2 \right]
 \end{aligned}$$

Wynik z obliczenia śladów

Bez masy elektronu

$$k^2 = k'^2 \simeq 0, \quad q^2 \simeq -2k \cdot k' = -4EE' \sin^2 \Theta/2, \quad p' = k - k' + p$$

$$q^2 = -2p \cdot q = -2\nu M \quad (z : p + q = p') \quad \nu = E - E' = -\frac{q^2}{M}$$

$$|M|_{e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-}^2 = \frac{8e^4}{q^4} 2M^2 E' E \left[\cos^2 (\Theta/2) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 (\Theta/2) \right]$$

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{1}{(2E)(2M)} \frac{|M|^2}{4\pi^2} \frac{d^3k'}{2E} \frac{d^3p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p + k - p' - k') \\
 &= \frac{1}{8ME} \frac{|M|^2}{4\pi^2} E' dE' d\Omega \frac{d^3p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p + q - p')
 \end{aligned}$$

wykorzystując: (tablica, $A = 1 + \frac{2E}{M} \sin^2(\Theta/2)$)

$$\begin{aligned}
 \int \frac{d^3p'}{2p'_0} \delta^{(4)}(p + q - p') &= \frac{1}{2M} \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right) \\
 &= \frac{1}{2MA} \delta(E' - E/A)
 \end{aligned}$$

Efekt spinu

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \Theta/2} \frac{E'}{E} \left[\cos^2 \Theta/2 - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \Theta/2 \right]$$

- W ostatnim wzorze uwzględniliśmy skończona masę tarczy (odrzut)
- Klasyczne rozpraszanie Rutherforda nie uwzględnia odrzutu i jednocześnie nie uwzględnia spinu
- Po uwzględnieniu spinu:

Efekt spinu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{Mott} = \frac{Z^2 \alpha^2 E^2}{4k^4} \frac{1}{\sin^4 \Theta/2} \left[1 - v^2 \sin^2 \Theta/2 \right]$$

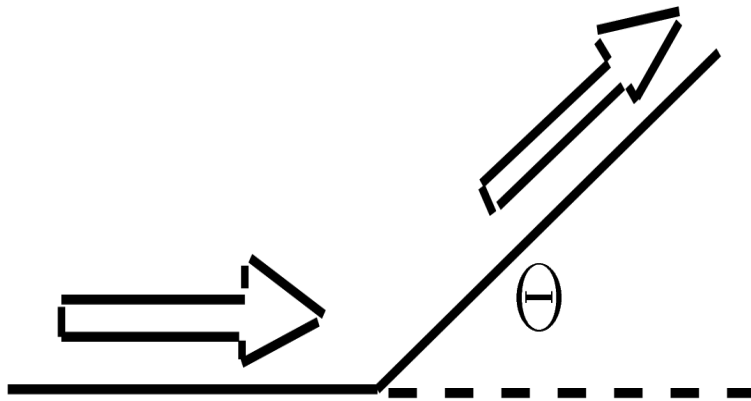
$$1/2 \sum_{s, s_f} |\bar{u}_f \gamma_0 u_i|^2 = 4E^2 \left[1 - v^2 \sin^2 \Theta/2 \right], \quad v = k/E$$

Zerowa składowa, bo rozpraszanie na statycznym ładunku

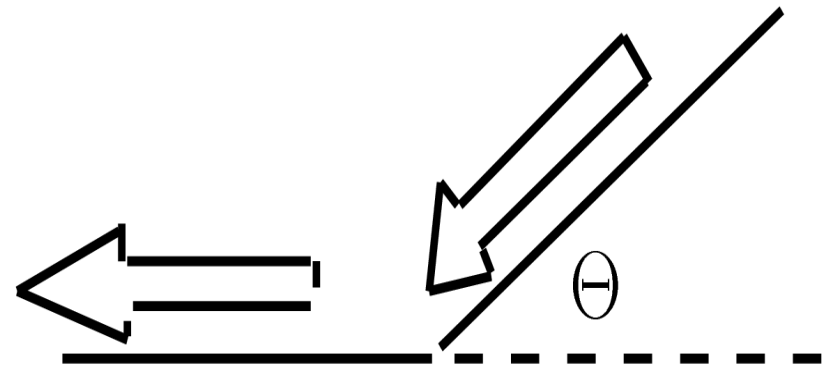
Dyskusja

- W przypadku nierelatywistycznym ($v \rightarrow 0$), Mott=Ruth, czyli tak jakby spin cząstki nie oddziaływał z polem zewnętrznym. Jest tak ponieważ w układzie tarczy istnieje tylko pole elektryczne. W układzie w którym porusza się elektron mamy pole magnetyczne [$B' = \gamma(v \times E)$] i gdy $v=0$, $B'=0$; spin elektronu “przestaje” oddziaływać z tarczą
- Dla dużych energii z kolei ($v \rightarrow 1$),
Mott=Ruth $\cdot \cos^2(\Theta/2)$

Można to zrozumieć następująco



$$|d_{++}^{1/2}(\Theta)|^2 = \cos^2 \Theta / 2$$

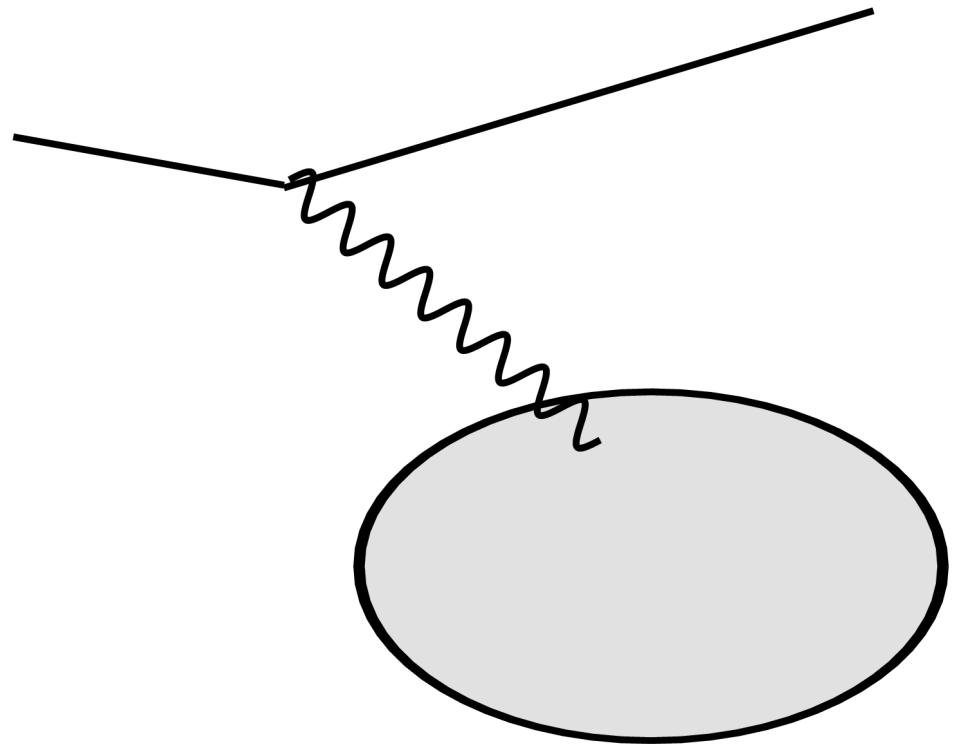


$$|d_{--}^{1/2}(\Theta)|^2 = \cos^2 \Theta / 2$$

Wiemy już, że w wysokich energiach helicity jest zachowane i mamy dwie możliwe konfiguracje (jedna jest realizowana w zależności od rozpraszanej cząstki/antycząstki)

Struktura hadronów

- Hadrony na pewno nie są obiektami punktowymi, trzeba to uwzględnić, do tego celu używa się tzw. czynników postaci (formf-factors)



$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(\mathbf{q})|^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\text{punkt}}$$

Niech

$$\int \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 1$$

wtedy

$$F(\mathbf{q}) = \int \rho(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} d^3\mathbf{x}$$

np. jeśli $\rho(x) = e^{-ar}$,

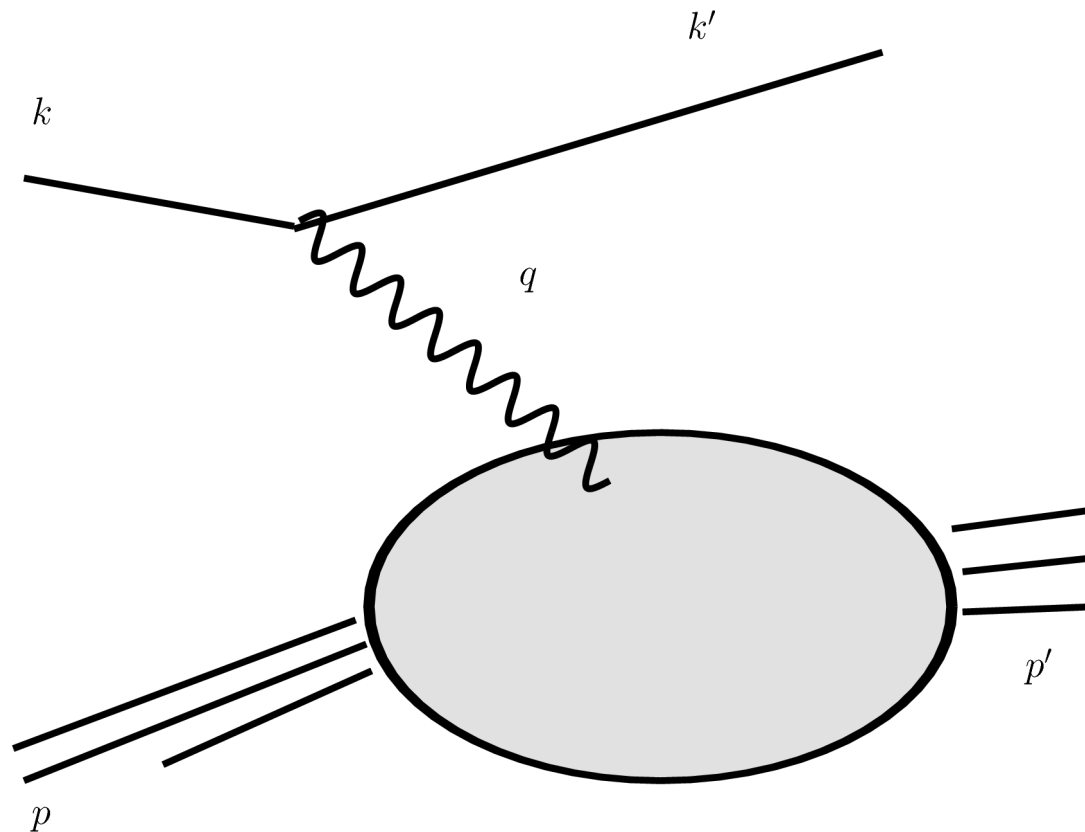
$$F(|q|) \simeq \frac{1}{(1 - q^2/a^2)^2}$$

.

Parametr “a” określa rozmiar obiektu

Rozpraszanie sprężyste elektron-proton

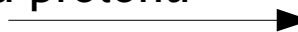
- Amplitudę obliczamy jak zwykle z prądów elektronowego (to już znamy) i protonowego



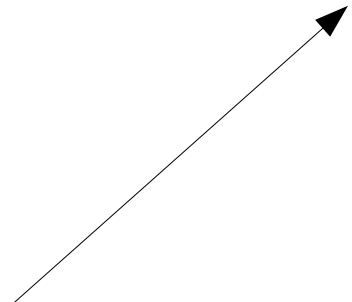
$$T_{fi} = -i \int j_\mu(-1/q^2) J^\mu d^4x$$

$$J^\mu = -e \bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) e^{i(k'-k) \cdot x}$$

Prąd protonu



$$J^\mu = e \bar{u}(p') [\text{?}]^\mu u(p) e^{i(p'-p) \cdot x}$$

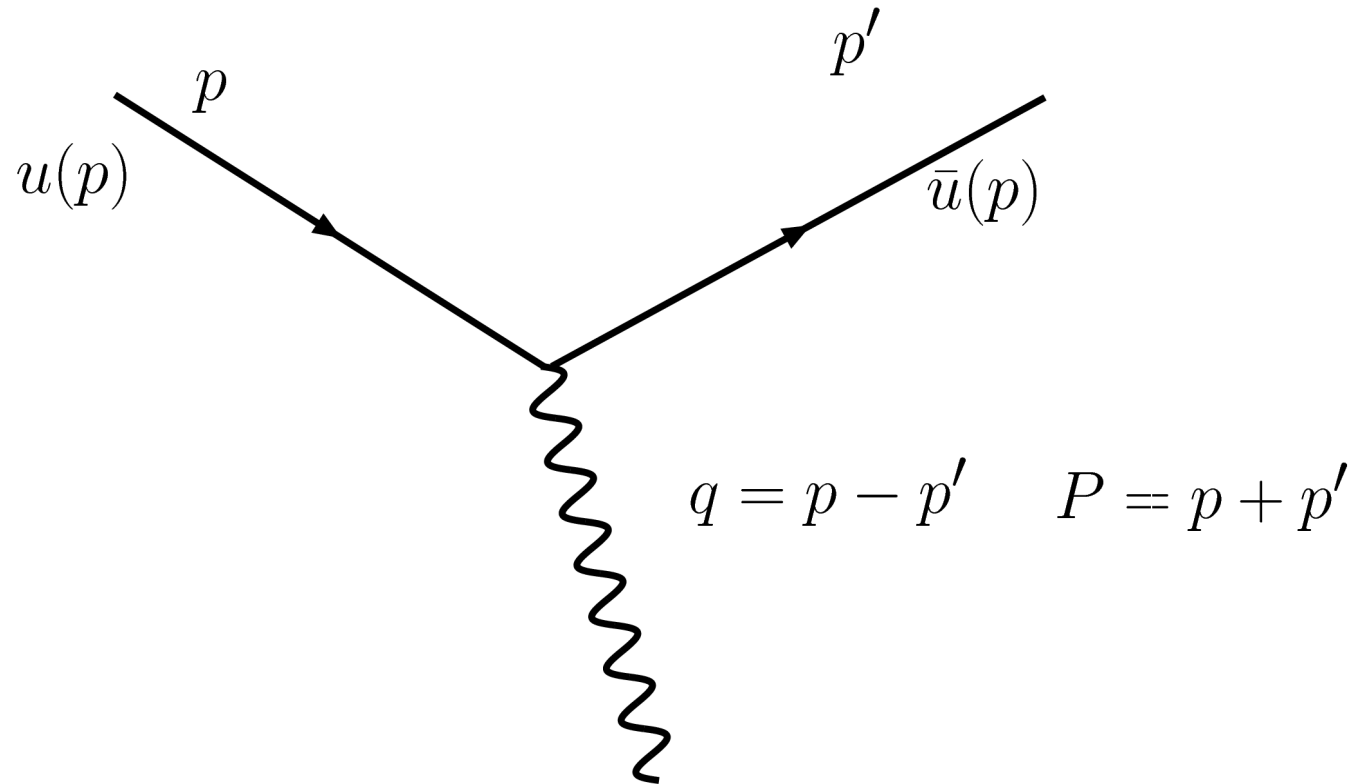


$$[\text{?}]^\mu = [F_1(q^2) \gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu]$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

Można pokazać, że z możliwych kombinacji macierzy Diraca, te są niezależne
(przy jakich warunkach?)

- Hermitowskość prądu (zachowanie parzystości)
- Cząstki na powłoce masy (spełniają r. Diraca)
- Zachowany prąd



$$J^\mu \simeq \bar{u}(p') \Gamma^\mu u(p)$$

Możliwe czterowektory

$$q^\mu, P^\mu, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} q_\nu, \sigma^{\mu\nu} P_\nu, \gamma^\mu \gamma_5, P^\mu \gamma_5, q^\mu \gamma_5$$

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu(p, q) = & F_1(q^2) \gamma^\mu + F_2' \frac{i}{2M} \sigma^{\mu\nu} q_\nu \\ & + F(q^2) q^\mu + F_3(q^2) \gamma^\mu \gamma_5 + F_4(q^2) q^\mu \gamma_5 + i F_5(q^2) \gamma_5 P_\mu \end{aligned}$$

$$P^\mu = 2M \gamma^\mu - i \sigma^{\mu\nu} q_\nu$$

Relacja Gordona
(dla cząstek na powłoce masy)

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} F_2$$

$$G_M = F_1 + \kappa F_2$$

G_M, G_E można zinterpretować jako fourierowskie obrazy momentu magnetycznego oraz ładunku

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{LAB} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \Theta/2} \frac{E'}{E} \left[\frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} \cos^2 \Theta/2 - \frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \sin^2 \Theta/2 \right]$$

Wzór Rosenblutha

