

Równanie Schrödingera:

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$$

kwantowanie:



$$i\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\Delta}{2m}\Psi$$

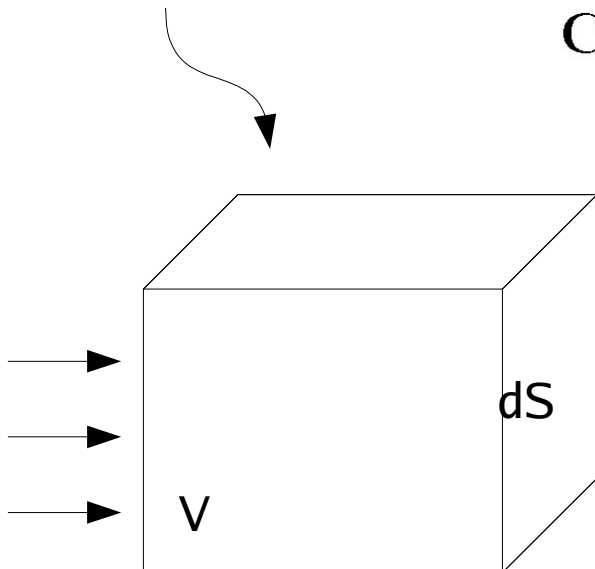
Równanie ciągłości (cząstki traktujemy jak strumień, prąd)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Wskazówka do wyprowadzenia
(plus p. Gaussa)

Co w równaniu Schrödingera odpowiada ρ i \vec{j} ?

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



Erwin Schrodinger

- Austriak
- 1926 (4 prace)
- Nobel (wraz z Dirakiem), 1933
- Paradoks kota
- “Czym jest życie?” (o teorii dziedziczenia), inspiracja także dla biologów molekularnych



Banknot 1000 szylingowy

$$\rho = |\Psi|^2$$
$$\vec{j} = \frac{i}{2m} (\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi)$$

(pokazać na tablicy)

Dla fali płaskiej $\Psi N e^{-ipx} \equiv N e^{ip\vec{x} - iEt}$ interpretację uzyskuje standardowo gęstość (prawdopodobieństwa):

$$\rho = |\Psi|^2 = |N|^2$$
$$\vec{j} = \rho \vec{p} / m = \rho \vec{v}$$

>0

Równanie Kleina-(Focka)-Gordona

- Klein (Szwed), znany także z idei Kaluzy-Kleina (wiele wymiarów),
- Paradoks Kleina o przechodzeniu elektronu przez barierę (rozwiązany dopiero po 75 latach: P. Krekora, Q. Su and R. Grobe, Phys. Rev. Lett. 92, 040406 (2004));
- Gordon: fizyk niemiecki, w 1933 z przyczyn politycznych emigrował do Szwecji, gdzie współpracował z Kleinem

E dodatnie
i ujemne!
To kłopot

$$E^2 = p^2 + m^2$$

czyli (warunki kwantowania)

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\nabla^2 \Psi + m^2 \Psi$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \Psi = 0$$

$$\rho = i \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right)$$

$$\vec{j} = i \left(\Psi \vec{\nabla} \Psi^* - \Psi^* \vec{\nabla} \Psi \right)$$

dla fali płaskiej :

$$\rho = |N|^2 2E$$

$$\vec{j} = |N|^2 2\vec{p}$$

$$j^\mu = 2 |N|^2 p^\mu, \quad p^\mu = (E, \vec{p})$$

Równanie
Kleina-Gordona
(1926)

Co gorsza
prawdopodo
bieństwo też
może być
ujemne

Pauli, Weisskopf (1934)

w zapisie czterowektorowym

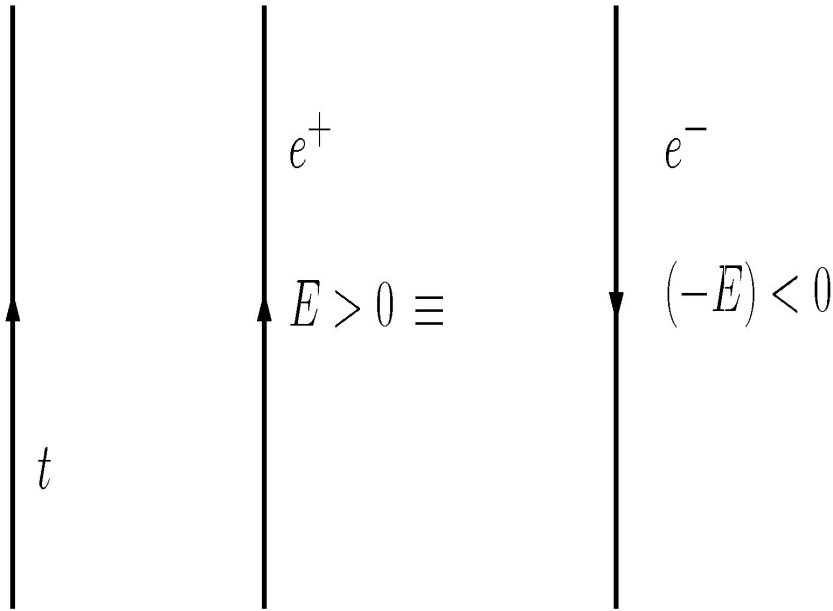
Elektron = pozytron, symetria T
formalizm Feynmana
Stuckelberga

$$j^\mu = (\rho, \vec{j}), \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$$

$$\partial_\mu j^\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$j^\mu = i (\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*)$$

Razy e: gęstość prądu



dla elektronu :

$$j^\mu = -i e (\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*)$$

$$j^\mu(e^-) = -2 e |N|^2 (E, \vec{p})$$

$$j^\mu(e^+) = +2 e |N|^2 (E, \vec{p}) = -2 e |N|^2 (-E, -\vec{p})$$

Mamy interpretację
prawdopodobieństwa,
ale problem $E < 0$
pozostaje

Elektrodynamika cząstek bezspinowych (oddziaływanie)

- Wstęp: teoria rozproszeń (z małym zaburzeniem)
- Martin, Halzen, Kwarki i leptony

$$i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = [H_0 + V(x, t)]\Psi$$

znamy wartosci i funkcje dla niezaburzonego :

$$H_0\phi_n = E_n\phi_n, \quad \int \phi_n^*\phi_m dV = \delta_{nm}$$

w sumie :

$$\Psi(x, t) = \sum_n a_n(t) [\phi_n(x)e^{-iE_n t}]$$

na starcie, gdy $V(t) = 0$:

$$\Psi_i = \phi_i e^{-iE_i t}, \quad a_n(t) = \delta_{in}$$

na koniec, gdy znowu $V = 0$:

$$\begin{aligned} (*) \quad \Psi_k &= \sum_n a_{ni}(t) \phi_n e^{-iE_n t} \\ \langle \phi_n | \Psi_k \rangle^2 &= \sum_m \int dV \underbrace{\phi_f^* a_{mi}(t) \phi_m}_{a_{mi} \delta_{fm}} e^{-iE_m t} \\ &= |a_{fi}(t) e^{-iE_n t}|^2 = |a_{ni}(t)|^2 \end{aligned}$$

potrzebujemy $a_{ni}(t)$,

wstawiamy (*) do r.Schr., $a_{ni}(t) \equiv a_n(t)$,

otrzymamy :

$$\begin{aligned} \frac{da_f}{dt} &= -i \sum_n \langle f | V | n \rangle a_n e^{i\omega_{fn} t}, \\ \omega_{fn} &= E_f - E_n \end{aligned}$$

ostatecznie:

weźmy przybliżenie $a_n(t) \rightarrow \delta_{ni}$ (małe V , przez krótki okres czasu), wtedy

$$a_{f(i)}^{(1)}(t) = -i \int_0^t dt' \langle f|V|i \rangle e^{i\omega_{fi}t'}$$

ostatecznie (tablica) :

$$T_{fi} \equiv a_{fi}^{(1)} = -i \int d^4x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x)$$

 **Prawdopodobieństwo przejścia i->f: kwadrat modułu**

Ze względu na deltę Diraca (zachowanie energii) normalizujemy do nieskończonego czasu (zasada nieoznaczoności Heisenberga)

$$\text{Dla } V(x, t) = V(x)$$

$$T_{fi} = -iV_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i)$$

gdzie

$$V_{fi} = \int d^3x \phi_f^*(x) V(x) \phi_i(x)$$

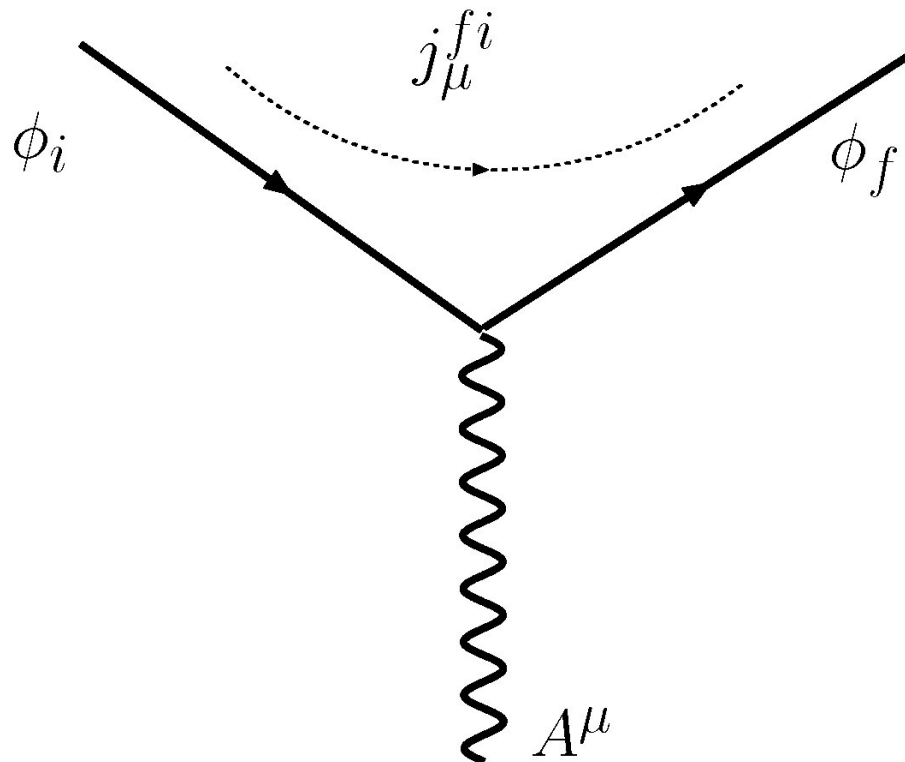
$$W = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|T_{fi}|^2}{T} = 2\pi |V_{fi}|^2 \delta(E_f - E_i)$$

$$\begin{aligned} W_{fi} &= \int W_{fi} \rho(E_f) dE_f = 2\pi \int |V_{fi}|^2 \rho(E_f) \delta(E_f - E_i) \\ &= 2\pi |V_{fi}|^2 \rho(E_i) \end{aligned}$$

Zwykle mamy przejście do grupy stanów o gęstości stanów $\rho(E_f)$ stąd całka po tych stanach, otrzymujemy tzw. Złotą regułę Fermiego

Elektrodynamika cząstek bezspinowych (oddziaływanie)

- Zastosujemy te rozważania w praktyce
- Oddziaływanie z zewnętrznym polem $A^\mu = (\phi, \mathbf{A})$



Oddziaływanie w klasycznej elektrodynamice (bezsピンowej)

$$E = \sqrt{p^2 + m^2}$$

$$E = \sqrt{(\vec{p} - q\vec{A})^2 + m^2} + q\phi$$

czyli :

$$E \rightarrow E - q\phi,$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$$

plus kwantowanie dla E i p (tablica) :

$$\partial_\mu = (\partial_t, \vec{\nabla}) = \partial_\mu + iqA_\mu$$

dla elektronu :

$$\partial_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$$

równanie Kleina-Gordona przyjmie postać

$$[\partial_\mu \partial^\mu + m^2] \phi = -V \phi$$

$$V = -ie(\partial_\mu A^\mu + A_\mu \partial^\mu) + \mathcal{O}(A^2)$$

ostatecznie ::

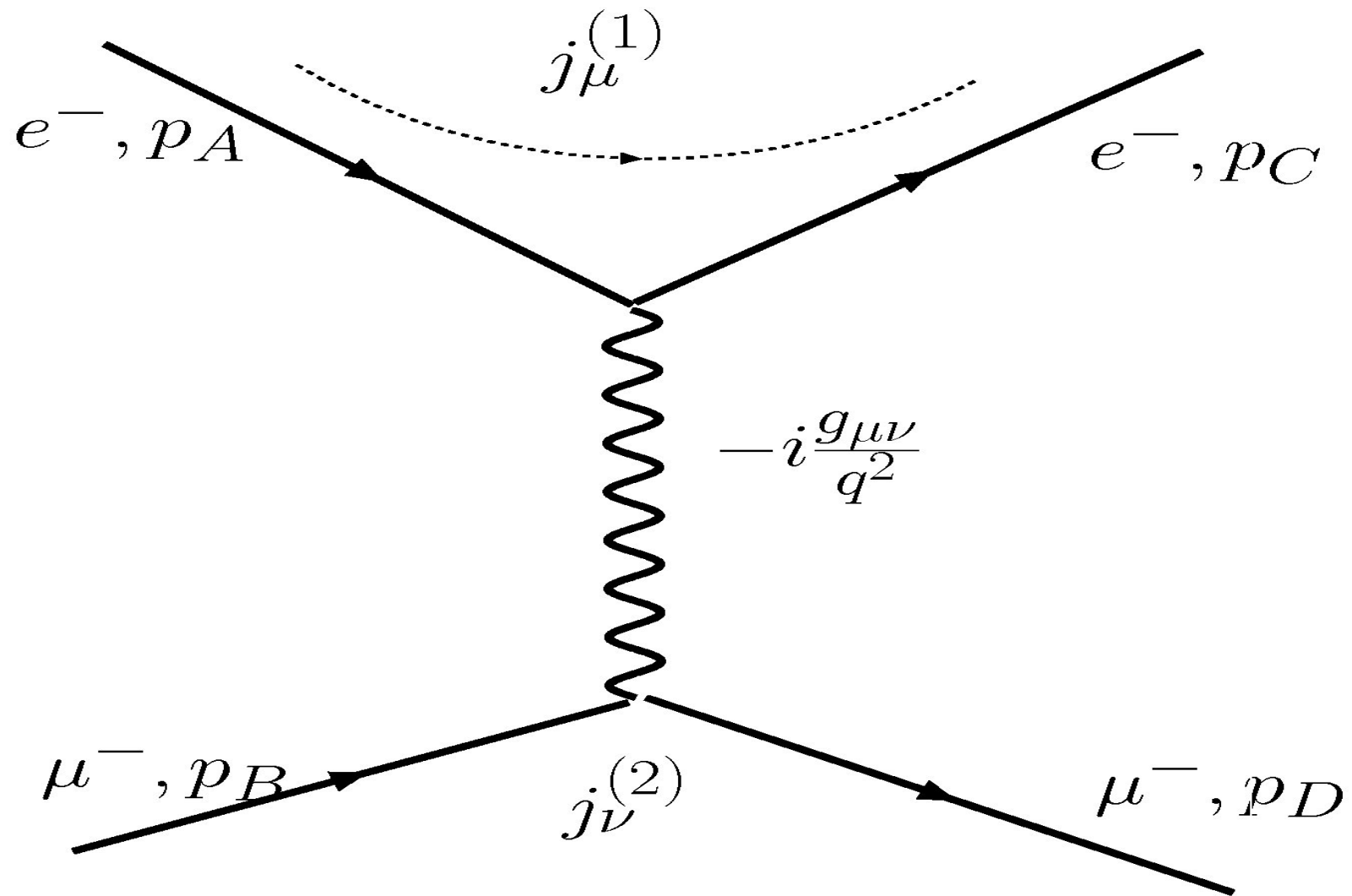
$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{fi}(x) A^\mu$$

$$j_\mu^{fi}(x) = -ie (\phi_f^* \partial_\mu \phi_i - (\partial_\mu \phi_f^*) \phi_i)$$

dla fal płaskich :

$$j_\mu^{fi}(x) = -e N_i N_f (p_i + p_f)_\mu e^{i(p_f - p_i)x}$$

Rozpraszanie elektron-mion



Rozpraszanie elektron-mion

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_\mu^{(1)}(x) \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) j_\nu^{(2)}(x)$$

To jest efektywnie A^μ

Elektron jest
w polu mionu (lub
odwrotnie)

(tablica) :

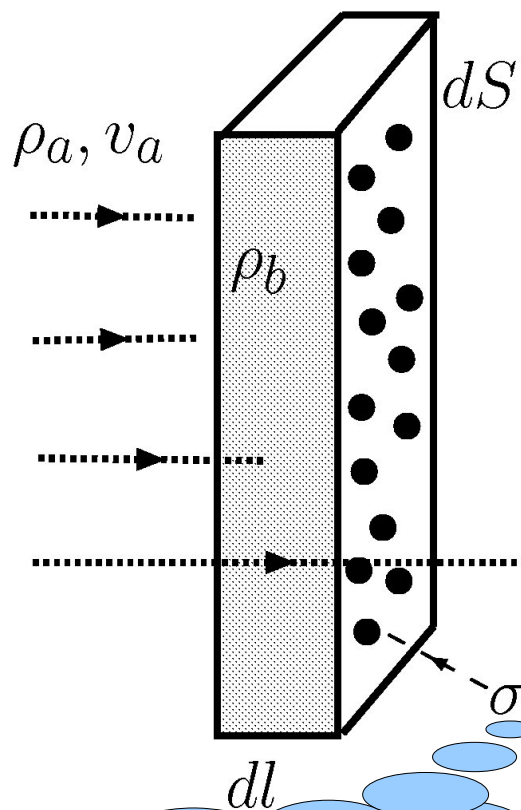
$$T_{fi} = -i N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_D + p_C - p_A - p_B) M$$
$$-iM = ie(p_A + p_C)^\mu \left(-i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right) ie(p_B + p_D)^\nu$$

Ale jak przejść do
eksperymentu, który
mierzy np. ilość
cząstek
rozproszonych pod
danym kątem?

To amplituda, ważny element tzw.
Przekroju czynnego

Przekrój czynny: $a + b \rightarrow c + d$

Ilość cząstek padających (na sekundę), ilość cząstek w tarczy: $dl \, dS \, \rho_b$



Efektywna powierzchnia zajęta przez krążki w tarczy

$$\rho_a v_a dS$$

$$dl \, dS \, \rho_b \, \sigma$$

Prawdopodobieństwo, że cząstka padająca trafi w efektywną powierzchnię

$$\frac{dl \, dS \, \rho_b \, \sigma}{dS} = dl \, \rho_b \, \sigma$$

Ilość wszystkich oddziałyujących w ciągu sekundy

$$(dl \, \rho_b \, \sigma)(\rho_a \, v_a \, dS) = (dl \, dS)(\rho_a \, \rho_b \, v_a) \, \sigma$$

Ilość cząstek oddziaływających w czasie T (w objętości V)

$$N = (v_a \, \rho_a \, \rho_b) \, \sigma \, (V \cdot T)$$

większe σ to większe prawdopodobieństwo

To równanie definiuje efektywny p. czynny

Przekrój czynny

$$\sigma = \frac{N}{v_a \rho_a \rho_b V T}$$

Krótko mówiąc p. czynny daje stosunek ilości cząstek aktywnie biorących udział w zderzeniu (w ciągu sek. na jedną cząstkę tarczy) do ilości padających cząstek (w ciągu sekundy na m²)

Jednostka: barn: 1b = 10⁽⁻²⁸⁾ m²

początkowo jednostka używana w fizyce jądrowej (w przybliżeniu powierzchnia czynna jądra uranu)

GeV⁽⁻²⁾ = 0.3894 mb

w fizyce cząstek mamy mniejsze przekroje czynne, stosuje się często pb = 10⁽⁻¹²⁾ b, fb = 10⁽⁻¹⁵⁾ b (np. typowe dla neutrina)

Typowe przekroje dla neutrin (PDG)

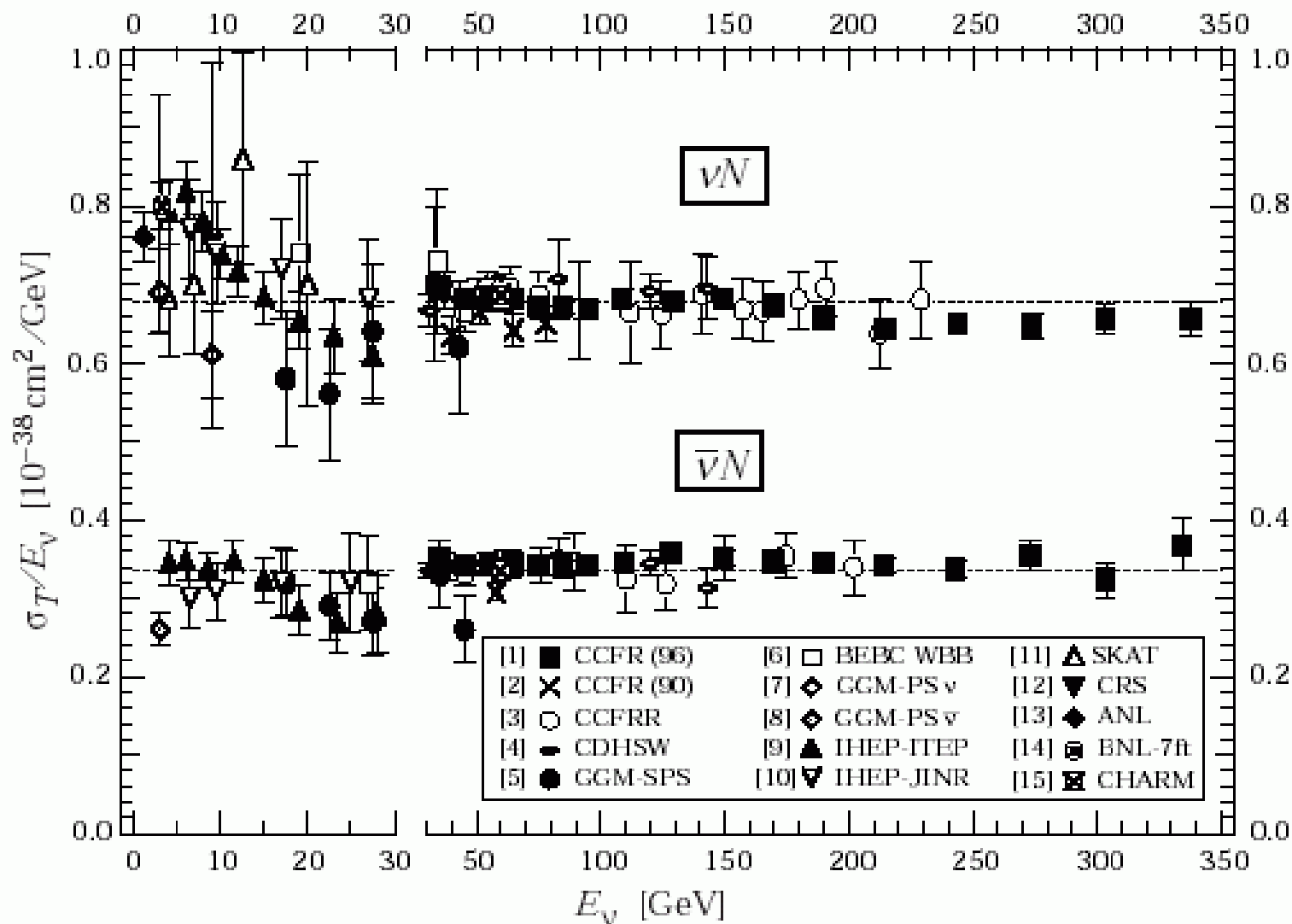
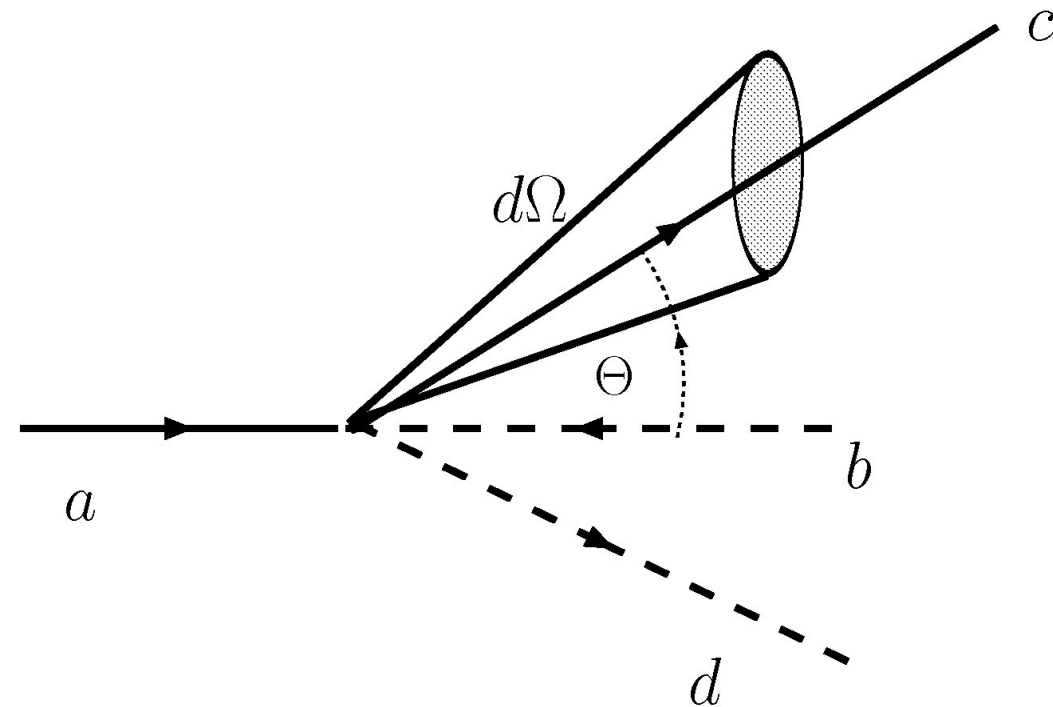


Figure 39.10: σ_T/E_ν , for the muon neutrino and anti-neutrino charged-current total cross section as a function of neutrino energy. The error bars include both statistical and systematic errors. The straight lines are the averaged values over all energies as measured by the experiments in Refs. [1–4]: $= 0.677 \pm 0.014$ (0.334 ± 0.008) $\times 10^{-38}$ cm^2/GeV . Note the change in the energy scale at 30 GeV. (Courtesy W. Seligman and M.H. Shaevitz, Columbia University, 2001.)

Całkowity, różniczkowy przekrój czynny

- Interesuje nas zazwyczaj definicja rozpraszania w kąt bryłowy
- Z równania definiującego p. czynny, musimy określić N (ilość cząstek, które po interakcji znalazły się w kącie bryłowym wokół "c", a także gęstości stanów cząstek "a" oraz "b")



gęstość stanów n cząstek w objętości V w zakresie $\vec{p}, \vec{p} + d\vec{p}$:

$$\frac{V d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 n}$$

normalizacja (dla n cząstek w objętości V):

$$\phi = N e^{-ipx}, \quad \rho = 2E |N|^2$$

$$\rho V = n \longrightarrow |N|^2 = \frac{n}{2EV}$$

$$dN = |T_{fi}|^2 \times (\text{ilość stanów końcowych wokół cząstek c,d})$$

$$T_{fi} = -iN_a N_b N_c N_d (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_c + p_d - p_a - p_b) M$$

$$\rho_a = n_a/V_a$$

Zbierzmy wszystko razem:

$$\begin{aligned}
 d\sigma &= \frac{dN}{v_a \rho_a \rho_b V T} \\
 &= \left(\frac{n_a}{2 E_a V_a} \right) \left(\frac{n_b}{2 E_b V_b} \right) \left(\frac{n_c}{2 E_c V_c} \right) \left(\frac{n_d}{2 E_d V_d} \right) \\
 &\times (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) |M|^2 \\
 &\times \left(\frac{V_c d^3 p_c}{(2\pi)^3 n_c} \right) \left(\frac{V_d d^3 p_d}{(2\pi)^3 n_d} \right) \frac{1}{\left(\frac{n_a}{V_a} \right) \left(\frac{n_b}{V_b} \right) v_a V T}
 \end{aligned}$$

$$d\sigma = \frac{1}{F} |M|^2 dLips(p_c, p_d)$$

$$F = 4E_a E_b v_a$$

$$dLips(p_c, p_d) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_i - p_f) \frac{d^3 p_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3 p_d}{(2\pi)^3 2E_d}$$

W układzie środka masy (CM)

$$F = 4p_a\sqrt{s}$$
$$dLips = \frac{p_c}{16\pi^2\sqrt{s}}d\Omega(\Theta, \phi)$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2s} \frac{p_f}{p_i} |M|^2$$