Szerokość połówkowa

rozpad $i \to f$ do n cząstek (f=1+...+n): zsumowanie po możliwych stanach końcowych:

$$\sum_f |T_{fi}|^2$$

liczba przejść $i \to f$ na sekundę $=$

$$\frac{N_i}{2E_i}\Pi_{k=1}^n \int \frac{d^3p_k}{2E_k(2\pi)^3}|M_{fi}|^2 \frac{|(2\pi)^4\delta^4(p_f-p_i)|^2}{VT}$$

Liczba przejść w czasie T dla N_i cząstek padających (normalizacja N/2EV, poprzedni wykład)l

ponieważ

$$(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i) = \int e^{i(p_f - p_i)x} d^4x$$

możemy napisać kwadrat modułu następująco

$$(2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\boxed{\frac{\int_{T,V} e^{i(p_f - p_i)x} d^4x}{TV}}$$

1

ostatecznie:

$$\Gamma_{i\to f} = \frac{1}{2E_i}\int |M_{fi}|^2 (2\pi)^4\delta^4(p_f - p_i)\Pi_{k=1}^{n}\frac{d^3p_k}{2E_k(2\pi)^3}$$

Wielkość nie jest lorentzowsko niezmiennicza: jakie to ma konsekwencje?

Dla rozpadu cząstki na większą ilość stanów definiujemy tzw. stosunek rozgałęzień (ang. branching ratio, zobacz PDG)

$$B_{i\to f} = \frac{\Gamma_{i\to f}}{\Gamma_{tot}}$$

Czas rozpadu:

Równanie

$$\frac{dN}{dt} = -\Gamma N$$

rozwiązanie

$$N = N_0 e^{-\Gamma t}$$

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}}$$

parametr

Dirac (1928): równanie relatywistyczne, prawdopodobieństwo dodatnie?

$$E = \pm\sqrt{p^2 + m^2}$$

to implikuje problem, bowiem

dla fali paskiej :

$$\rho = |N|^2 \, 2E$$

$$\vec{j} = |N|^2 \, 2\vec{p}$$

$$(\Box + m^2)\Psi = 0$$

Dirac: musimy znaleźć równanie
w którym E wchodzi liniowo!

Założenia Diraca

$$\boxed{E\Psi \;=\; (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m)\Psi,} \quad E^2 = p^2 + m^2$$

stąd warunki na $\vec{\alpha}$ oraz β

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_k\} &= 2\delta_{ik} \\ \{\alpha_i, \beta\} &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned}$$

- Nie mogą to być liczby
- Nie mogą to być macierze 2x2
- Nie mogą to być macierze o wymiarze nieparzystym
- Minimalnie: macierze o wymiarze 4x4!

Wykorzystując warunki kwantowania E i p

(tablica)

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \; = \; 0}$$

Swobodne równanie Diraca

$$\gamma^\mu \; = \; (\beta, \beta\vec{\alpha}), \quad \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$\mathrm{oraz:}$$

tzw. Macierze Diraca

$$\Psi(x) \; = \; \begin{pmatrix} \Psi_1(x) \\ \Psi_2(x) \\ \Psi_3(x) \\ \Psi_4(x) \end{pmatrix}$$

tzw. bispinor

Hipoteza wielkich liczb i zmienność stałych (zobacz: SPIRES)

Dirac i Feynman

- Stosunek rozmiaru Wszechświata do rozmiarów kwantowych rzędu 10^40
- Jest to ten sam rząd co stosunek siły elektromagnetycznej do grawitacyjnej (W2)
- Dirac wysunął hipotezę, że G zmienia się z czasem jak 1/t, gdzie t- czas życia Wszechświata
- Związek kosmologia <-> kwantowa grawitacja?

Macierze Diraca

$$
\begin{aligned}
\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \\
(\gamma^\mu)^\dagger &= \gamma_\mu \\
\gamma_\mu &= \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0
\end{aligned}
$$

istnieją dwie podstawowe reprezentacje macierzy

<u>reprezentacja Pauliego-Diraca, niskoenergetyczna</u>

$$
\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}
$$

<u>reprezentacja Weyla, wysokoenergetyczna</u>

$$
\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}
$$

.

Prawdopodobieństwo i prąd

$$j^\mu = \Psi^\dagger \gamma_0 \gamma^\mu \Psi \equiv \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi$$

$$\boxed{\rho \equiv j^0 = \Psi^\dagger \Psi = |\Psi|^2}$$

Ψ w przeciwieństwie do r. Schrodingera ma 4 składowe

$$\vec{j} = \bar{\Psi}\vec{\gamma}\Psi$$

I o to chodziło!

Zgodnie z interpretacją Pauliego-Weisskopfa mnożymy jeszcze przez (-e) i mamy prąd elektronowy

Postać bispinora

Równanie Diraca w przestrzeni pędu

$$\Psi = u(\vec{p})e^{-ipx}$$

$$(\hat{p} - m)u = 0, \quad \hat{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu$$

w reprezentacji Pauliego-Diraca

$$\begin{pmatrix} m & \vec{\sigma}\cdot\vec{p} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{p} & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

czyli

Ważne: dwukrotna degeneracja stanów (dla E>0 i E<0),
operator usuwający degenerację?

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}u_B = (E-m)u_A, \quad E > 0$$
$$\vec{\sigma}\cdot\vec{p}u_A = (E+m)u_B, \quad E < 0$$

$$E > 0: \qquad u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$$

$$\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wtedy

Dwa wektory własne z dodatnią energią

$$u_B^{(s)} = \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)}$$

czyli

$$\boxed{u^{(s)} = N\begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{E+m}\chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E > 0, \quad s = 1, 2}$$

Spin

+2

$$u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{|E|+m}\chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad E < 0, \quad s = 1, 2$$

oczywiście

$$u^{(r)\dagger} u^{(s)} = 0, \quad r \neq s$$

Moment pędu = orbitalny + "wewnętrzny"

dobra liczba kwantowa (komutuje z H)

$$\boxed{J = L + \frac{1}{2}\Sigma, \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}}$$

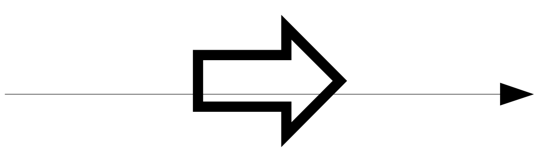
wtedy (tablica)

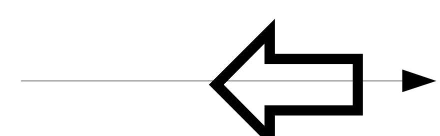
$$[H, J] = 0$$

Tzw. Spiralność (skrętność)

$$spin:$$

$$\frac{1}{2}\sigma\cdot\hat{p}\chi^{(s)} = \frac{1}{2}\sigma_3\chi^{(s)} = \lambda\chi^{(s)} \quad p = (0, 0, p_z), \quad \lambda = \pm 1/2$$





+1/2, spiralność w kierunku pędu

-1/2

Spinor Diraca dla antycząstek

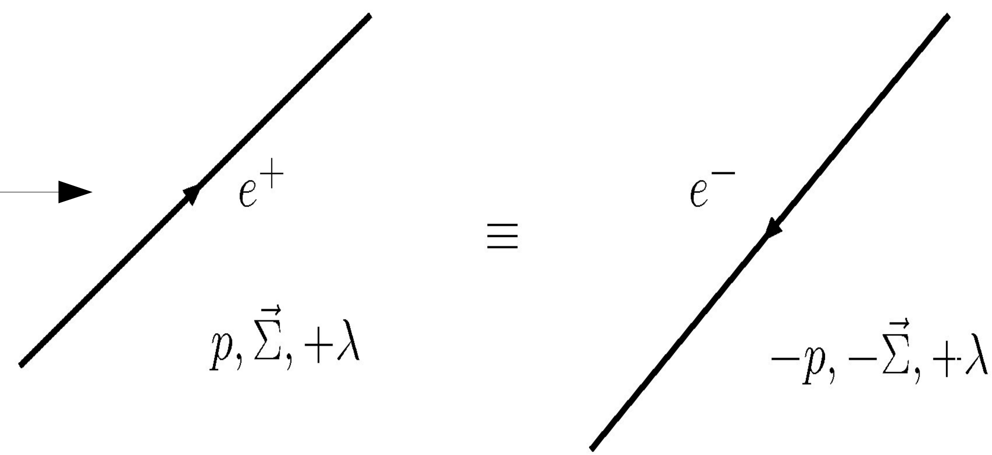
Z rozwiązań dla $E > 0$ oraz $E < 0$ widzimy, że

$$\boxed{u^{3,4}(-\vec{p})e^{-i(-p)x} \;=\; v^{2,1}(\vec{p})e^{ipx}}$$

równanie Diraca w p. pędu

$$(\hat{p} - m)u(\vec{p}) = 0, \quad [\vec{p} \to -\vec{p}] \longrightarrow \boxed{(\hat{p} + m)v(\vec{p}) = 0}$$

Skrętność ta sama



Równanie Diraca w polu e-m

To już wiemy:

$$\begin{aligned}
\left[\gamma^\mu(i\partial_\mu + eA_\mu) - m\right]\Psi &= 0 \\
\text{pozytron?} & \\
\left[\gamma^\mu(i\partial_\mu - eA_\mu) - m\right]\Psi_C &= 0
\end{aligned}$$

Jaki jest związek między tymi bispinorami?

(tablica)

$$\Psi_C = C\gamma^0\Psi^* \equiv C\bar{\Psi}^T$$

$$\begin{aligned}
\text{własności C} & \\
C^{-1}\gamma^\mu C &= (-\gamma^\mu)^T \\
C = -C^{-1} = -C^\dagger &= -C^T \\
\bar{\Psi}_C &= -\Psi^T C^{-1} \\
j^\mu &= -e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \\
j^\mu_C &= +e\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (tablica)
\end{aligned}$$

Normalizacja

Tak jak dla bozonów wybieramy normalizację 2E/V

$$\int \rho dV = \int \Psi^\dagger \Psi dV = u_r^\dagger u_s = 2E\delta_{rs}$$

z drugiej strony (tablica)

$$u^{(s)\dagger} u^{(s)} = |N|^2 \frac{2E}{E+m}$$

czyli

$$N = \sqrt{E+m}$$

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}(p)\bar{u}^{(s)}(p) = \hat{p} + m$$

$$\sum_{s=1,2} v^{(s)}(p)\bar{v}^{(s)}(p) = \hat{p} - m$$

Ważne relacje przy obliczaniu amplitud (uśrednianie po spinach)

Bezmasowe fermiony, reprezentacja Weyla (chiralna), 1929

Przypadek szczególny, skrajnie relatywistyczny

$$
\begin{aligned}
E\Psi &= (\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta\cdot 0)\Psi \\
\vec{\alpha} &= \begin{pmatrix} -\vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

wtedy

$$
\begin{aligned}
E\chi &= -\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi \\
E\chi &= +\vec{\sigma}\cdot\vec{p}\chi, \quad E = |\vec{p}|
\end{aligned}
$$

mamy

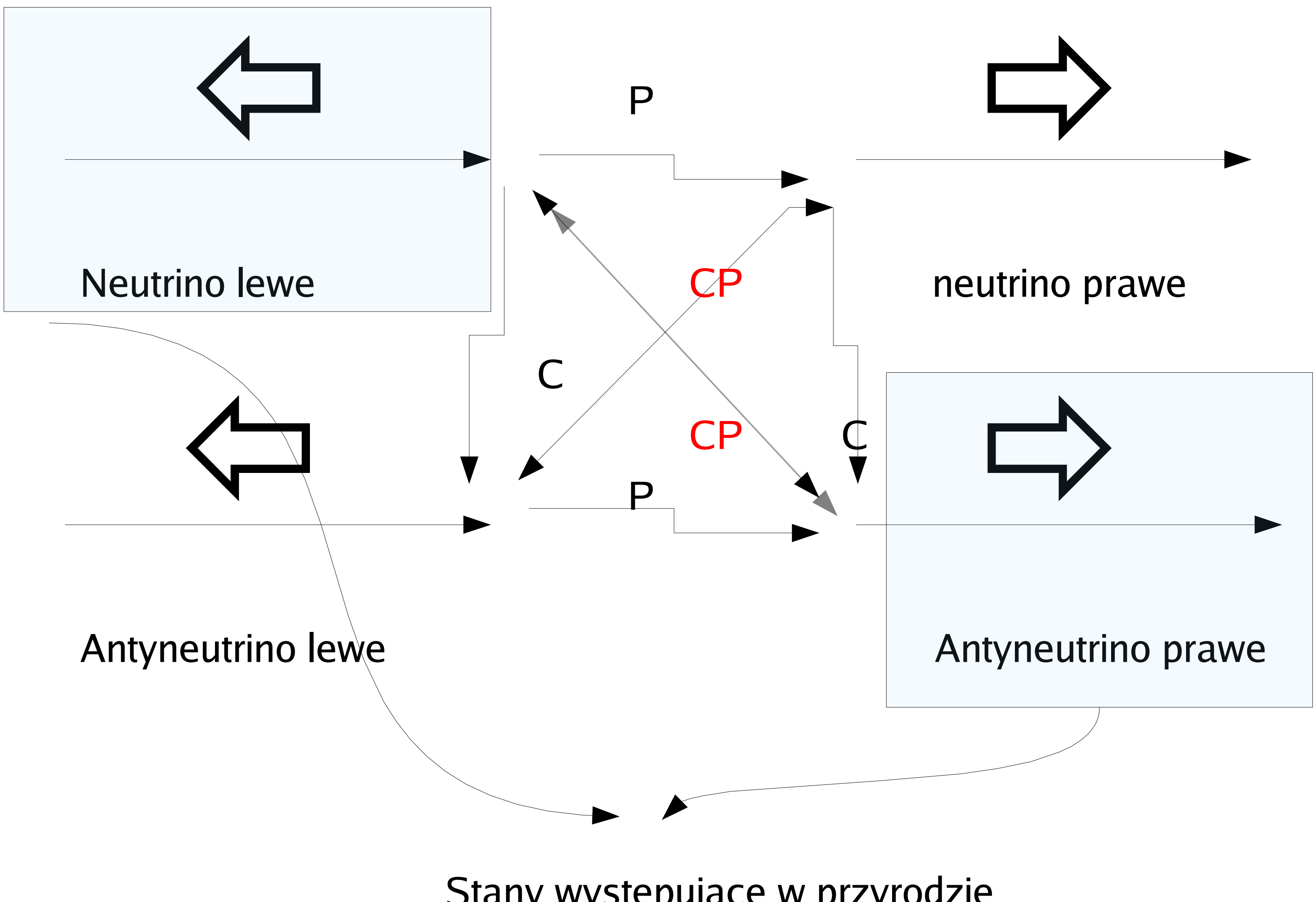
$$
\boxed{\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{p}}{|p|}\chi = -\chi, \quad E > 0, \quad \lambda = -1/2}
$$

$$
\vec{\sigma}\cdot(-\frac{\vec{p}}{|p|})\chi = \chi, \quad E < 0, \quad \lambda = +1/2
$$

$$
\chi = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \bar{\nu}_R \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} \nu_R \\ \bar{\nu}_L \end{pmatrix}
$$

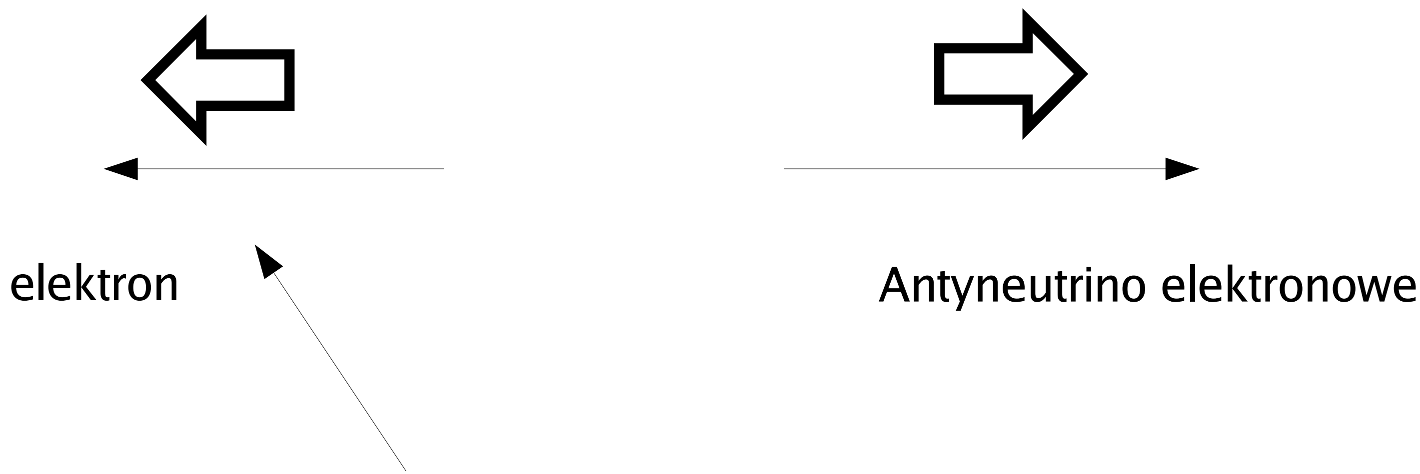
Przyjmuje się jako rozwiązanie obecne w oddziaływaniach (lewoskrętne neutrino)

Obserwowane stany słabe i symetrie C,P



Konsekwencje

- Skrętność zachowana w wysokich energiach (lub gdy masy zaniedbywalne)
- Rozpad pionu (w układzie spoczynkowym pionu)



Zła skrętność, w granicy zerowej masy w ogóle niemożliwa

dlatego

$$\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- \bar{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu)} << 1$$

Do tego jeszcze wrócimy ...

Prądy lewe

do tego by określić "realne" stany wprowadza się operatory rzutowe P_L oraz P_R,

$$\frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)\Psi = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_L = \frac{1}{2}\left(1-\gamma^5\right)$$

Analogicznie prawy

Oddziaływania słabe "w ybierają" tylko dwa stany neutrina: operator chiralności

$$\begin{aligned} P_R &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5), \quad P_L = \frac{1}{2}(1-\gamma_5) \\ \gamma_5 &= \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

prąd słaby:

$$J^\mu = \bar{\Psi}_e \gamma^\mu \frac{1}{2}(1-\gamma_5)\Psi_\nu$$

.

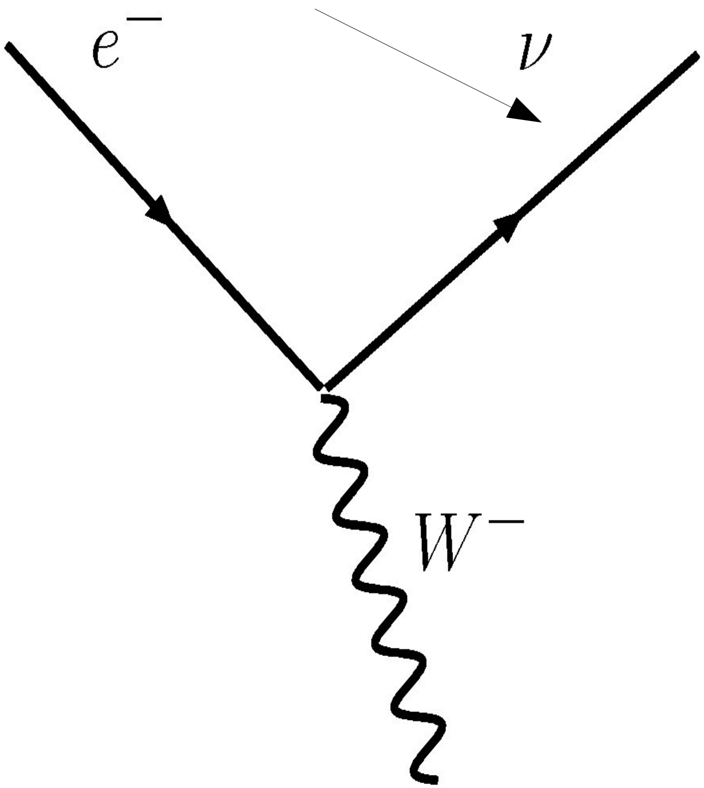
.

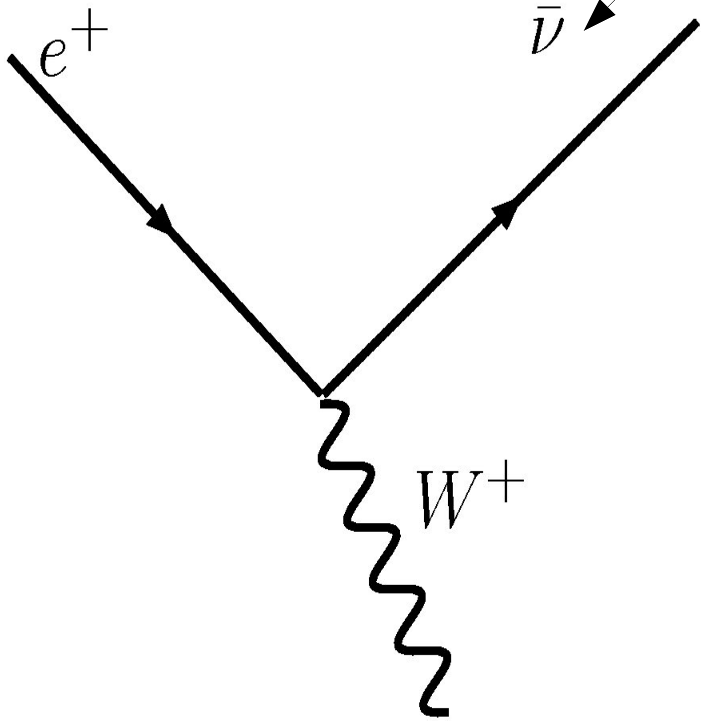
Mówimy, że mamy prądy typu V-A

rzeczywistość

lewe

Też lewe:
jak to możliwe?





$$j^\mu = \bar{\Psi}_{\nu_e} \gamma^\mu \frac{1}{2}\left(1 - \gamma^5\right) \Psi_e$$

$$j^\mu = \bar{\Psi}_{\bar{\nu}_{e^+}} \gamma^\mu \frac{1}{2}\left(1 + \gamma^5\right) \Psi_{e^+}$$

Plus czy minus?

Stąd zachowanie liczby leptonowej!!!