

Elektrodynamika cząstek o spinie 1/2

wpierw ustalmy potencjał dla pola A_μ
 (nierelatywistycznie to 'tradycyjnie' $-eA^0 = -e\phi$)

$$(\hat{p} - m)\Psi = 0, \quad p^\mu \rightarrow p^\mu + eA^\mu$$

$$(\hat{p} - m)\Psi = -e\gamma^0\gamma_\mu A^\mu$$

wtedy

$$T_{fi} = -i \int d^4x \Psi_f^\dagger V(x) \Psi_i \equiv -i \int d^4x j_{fi}^\mu A_\mu$$

$$j_{fi}^\mu = -e \bar{\Psi}_f \gamma^\mu \Psi_i$$

bez spinu

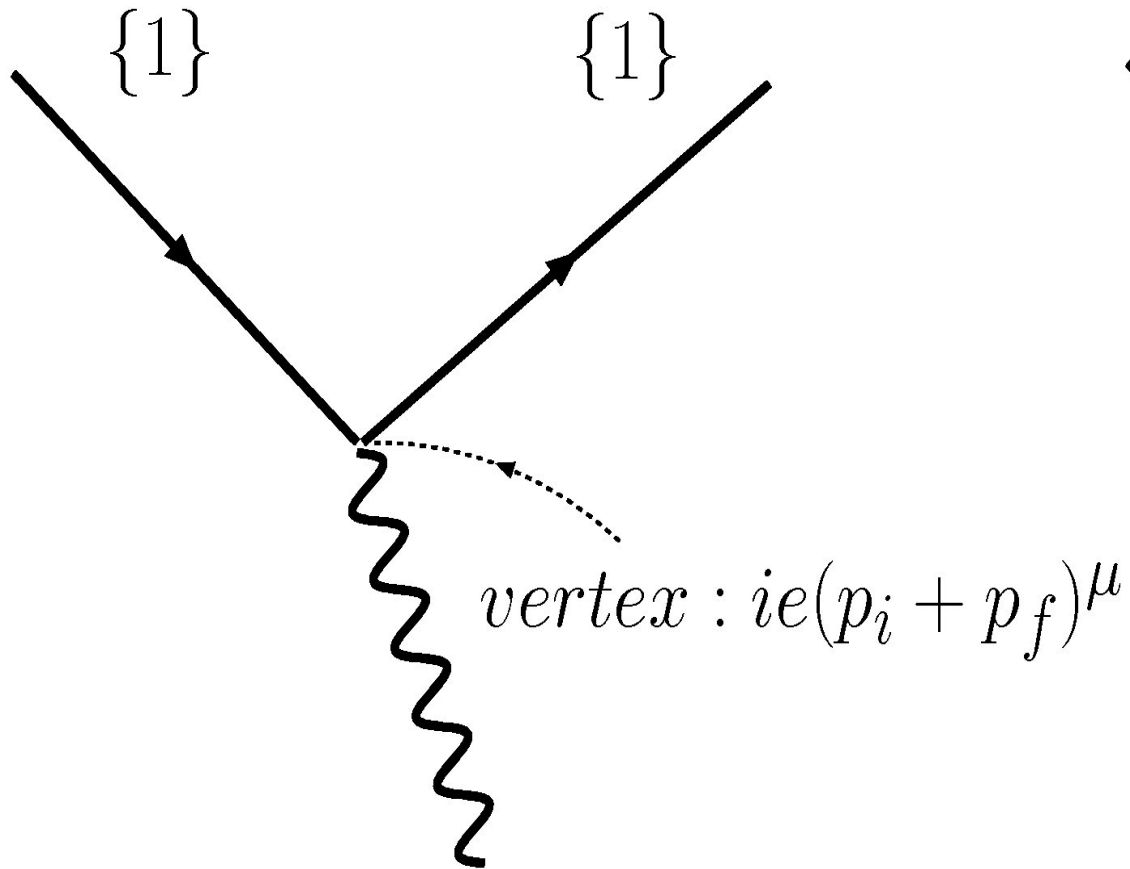
$$j_{fi}^\mu = -e \{1\} (p_i + p_f)^\mu \{1\} e^{-ix(p_i - p_f)}$$

ze spinem

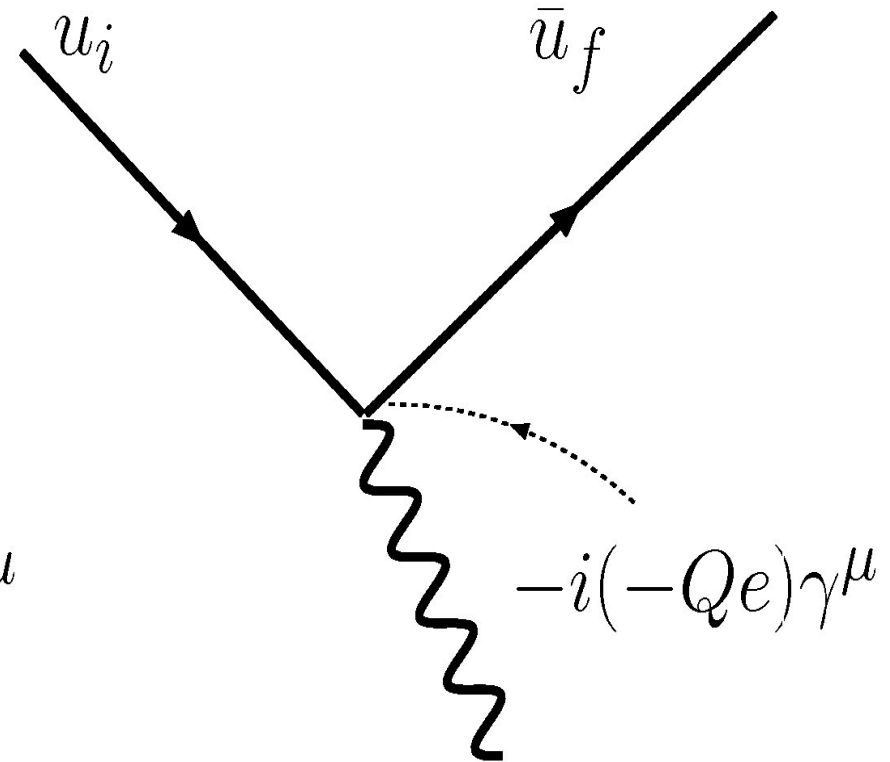
$$j_{fi}^\mu = -e \bar{u}_f \gamma^\mu u_i e^{-ix(p_i - p_f)}$$

Dodatkowa γ^0 , aby mieć
 odpowiedniość z oddziaływaniem
 nierelatywistycznym
 dla składowych, gdy $A^\mu = A^0$

Tak powstają tzw. Reguły Feynmana

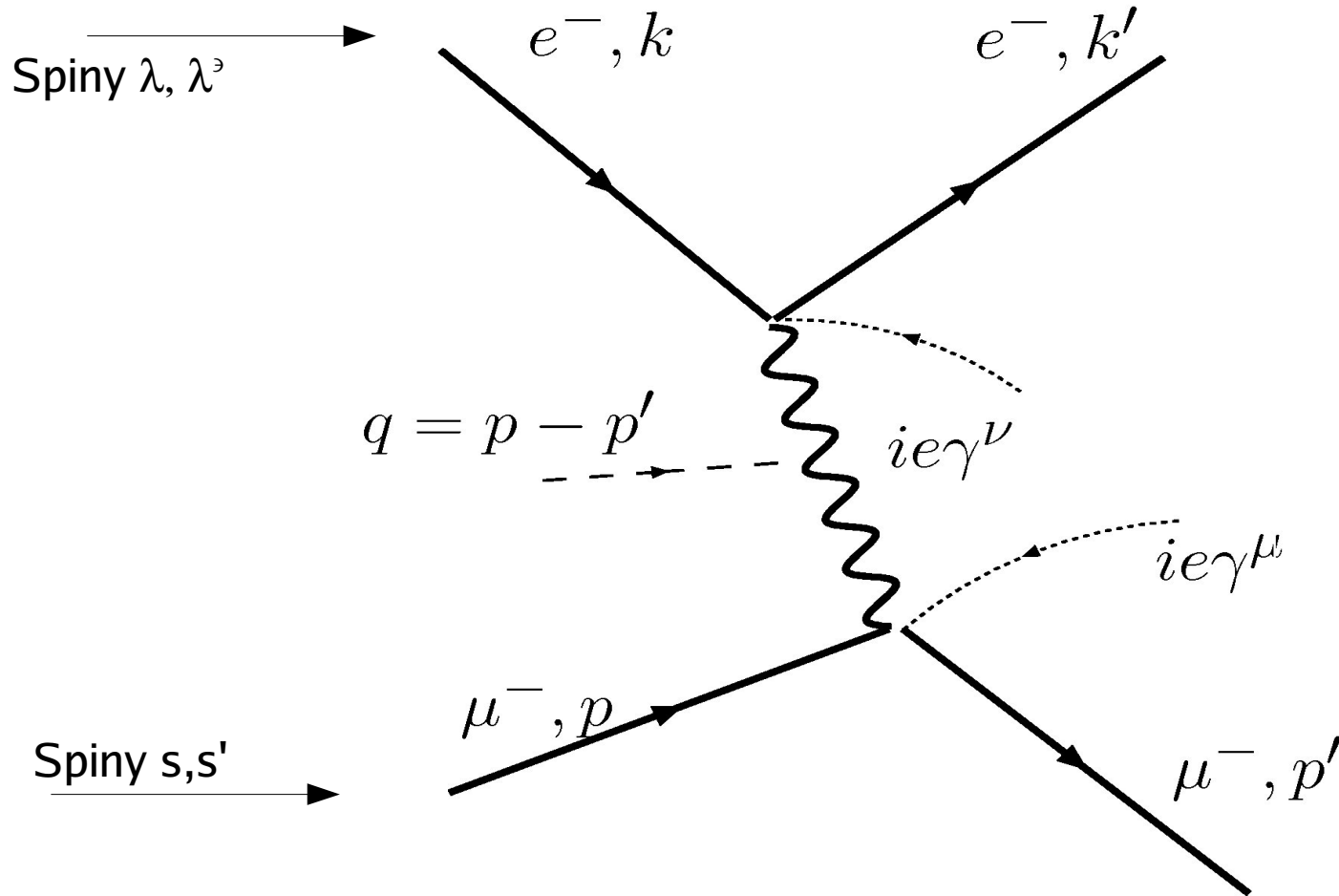


$$s = 0$$



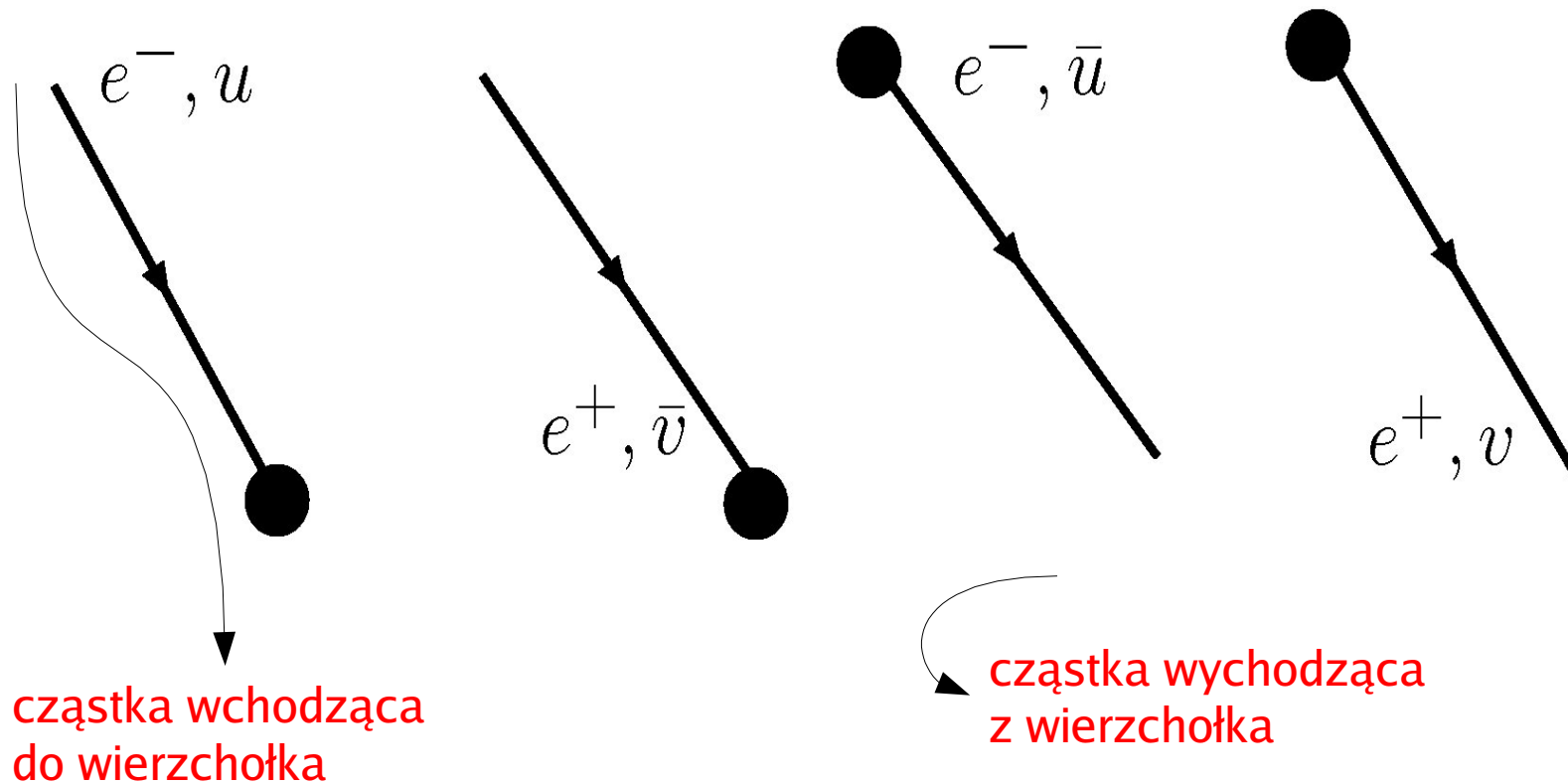
$$s = 1/2$$

Przykłady

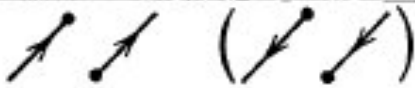


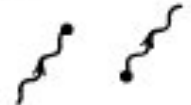








$$-iM_{e^-\mu^-} = \{\bar{u}(k')ie\gamma^\nu u(k)\} \left[-i\frac{g_{\nu\mu}}{q^2} \right] \{\bar{u}(p')ie\gamma^\mu u(p)\}$$

Przyporządkowanie spinorów



Podstawowe reguły Feynmana

		Multiplicative Factor	
● External Lines	Spin 0 boson (or antiboson)		1
	Spin 1/2 fermion (in, out)		u, \bar{u}
	antifermion (in, out)		\bar{v}, v
	Spin 1 photon (in, out)		$\epsilon_\mu, \epsilon_\mu^*$
● Internal Lines—Propagators (need +iε prescription)	Spin 0 boson		$\frac{i}{p^2 - m^2}$
	Spin 1/2 fermion		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2}$
	Massive spin 1 boson		$\frac{-i(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / M^2)}{p^2 - M^2}$
	Massless spin 1 photon (Feynman gauge)		$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2}$
● Vertex Factors	Photon—spin 0 (charge -e)		$ie(p + p')^\mu$
	Photon—spin 1/2 (charge -e)		$ie\gamma^\mu$

Loops: $\int d^4k / (2\pi)^4$ over loop momentum; include -1 if fermion loop and take the trace of associated γ -matrices

Identical Fermions: -1 between diagrams which differ only in $e^- \leftrightarrow e^-$ or initial $e^- \leftrightarrow$ final e^+

rozpraszanie niespolaryzowanych cząstek

Jak już wiemy

$$\frac{d\sigma(\lambda', s'; \lambda, s)}{d\Omega} \Big|_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{p_f}{p_i} |M(\lambda', s'; \lambda, s)|^2$$

Bez polaryzacji:

$$|M(\lambda', s'; \lambda, s)|^2 = \frac{1}{(2s+1)(2\lambda+1)} \sum_{\lambda', s'} |M(\lambda', s'; \lambda, s)|^2$$

Zsumowanie po stanach końcowych
(i początkowych)

Uśrednienie po stanach początkowych

Dwa prądy dają w kwadracie

Kwadrat amplitudy możemy zapisać:

$$|M(\lambda', s'; \lambda, s)|^2 = \frac{e^4}{q^4} L_e^{\mu\nu}(k, k') L_{\mu\nu}^{mion}(p, p')$$

Gdzie (analogicznie wygląda obiekt dla mionu)

$$L_e^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \sum_{(e \text{ spins})} [\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k)] [\bar{u}(k') \gamma^\nu u(k)]^*$$

trick

Ponieważ drugi człon jest liczbą (dodanie transpozycji) oraz wykorzystanie własności macierzy gamma daje

$$\begin{aligned} [u^\dagger(k') \gamma^0 \gamma^\nu u(k)]^\dagger &= [u^\dagger(k) \gamma^{\nu\dagger} \gamma^0 u(k')] \\ &= [\bar{u}(k) \gamma^\nu u(k')], \end{aligned}$$

Indeksy greckie oznaczają elementy odpowiednich macierzy

$$L_e^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{s'} \underbrace{\bar{u}_\alpha^{(s')}(k')}_{(\not{k}' + m)_{\delta\alpha}} \gamma_{\alpha\beta}^\mu \sum_s \underbrace{u_\beta^{(s)}(k) \bar{u}_\gamma^{(s)}(k)}_{(\not{k} + m)_{\beta\gamma}} \gamma_{\gamma\delta}^\nu u_\delta^{(s')}(k')$$

Widzimy, że możemy wykorzystać relację zupełności i ostatecznie otrzymujemy

$$L_{\mu\nu}^{mion}(p, p') = \frac{1}{2} \text{Tr} [\gamma_{\mu}(\hat{p} + M)\gamma_{\nu}(\hat{p}' + M)]$$
$$L_e^{\mu\nu}(k, k') = \frac{1}{2} \text{Tr} [\gamma^{\mu}(\hat{k} + m)\gamma^{\nu}(\hat{k}' + m)]$$

Niektóre potrzebne ślady

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) &= \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\gamma^\mu \gamma^\nu\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} 2g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \text{Tr} I = 4g^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta) = 4(g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} - g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} + g^{\mu\beta} g^{\alpha\nu})$$

$$\gamma^\mu \gamma_\mu = 4$$

$$\gamma^\mu \hat{a} \gamma_\mu = -2\hat{a}$$

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$$

Liczy się
analogicznie

Form: <http://www.nikhef.nl/~form/>

- CAS: computer algebra systems
- Form, darmowy, **Vermaseren** (wcześniej **Veltman**: lata 60-te!)
- Inne: Mathematica, Maple, Maxima (darmowy),...

```
[gluza_localhost W6]$ form example.frm
```

```
FORM by J.Vermaseren,version 3.1(Jan 24 2003) Run at: Sat F  
off statistics;
```

deklaracje

```
s d;  
dimension d;  
indices mu,nu,alpha,beta;
```

definicje

```
l test1 = d_(mu,nu)*d_(mu,nu);
```

```
l test2 = g_(1,mu)*g_(1,alpha)*g_(1,nu)*g_(1,beta);
```

ślad

```
tracen,1;
```

```
print +s;
```

Wynik w przestrzeni
d wymiarowej

```
test1 =  
+ d  
;
```

To samo co na
przedostatniej

```
test2 =  
- 4*d_(mu,nu)*d_(alpha,beta)  
+ 4*d_(mu,alpha)*d_(nu,beta)  
+ 4*d_(mu,beta)*d_(nu,alpha)  
;
```

```
[gluza_localhost W6]$
```

Ostatecznie:

$$e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$$

$$|M|^2 = 2 \frac{e^4}{t^2} [s^2 + u^2 + 2(m^2 + M^2)(t - s - u) + 2(m^2 + M^2)^2]$$

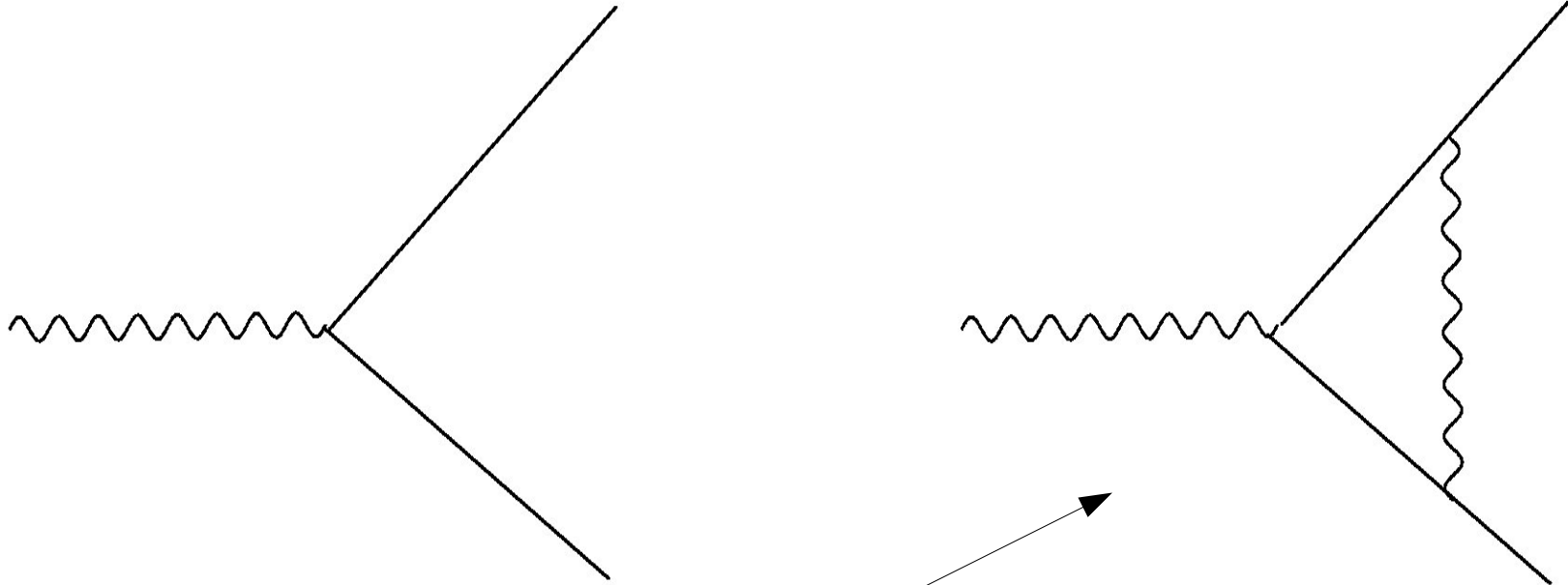
$$e^- e^+ \rightarrow \mu^- \mu^+$$

$$|M|^2 = 2 \frac{e^4}{s^2} [t^2 + u^2 + 2(m^2 + M^2)(s - t - u) + 2(m^2 + M^2)^2]$$

$$e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$$

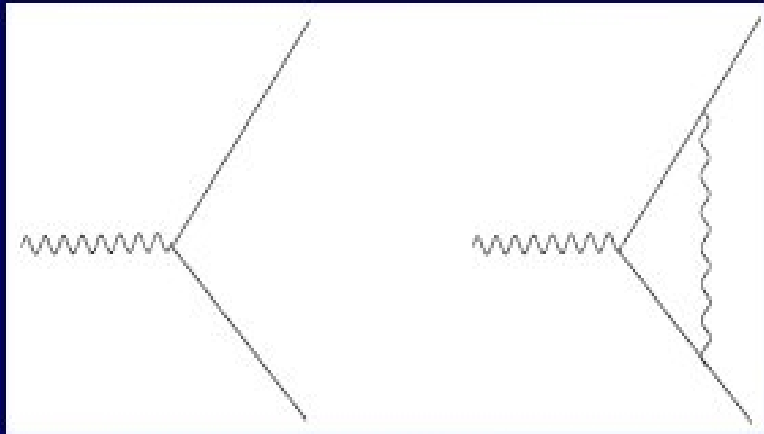
$$|M|^2 = 2 \frac{e^4}{t^2} [s^2 + u^2 + 2(m^2 + M^2)(t - s - u) + 2(m^2 + M^2)^2]$$

pętla



A teraz to
betka dla
studentów

Za to był Nobel (no, w przybliżeniu)



1928:

$$i[\partial_\mu - ieA_\mu(x)]\gamma^\mu\Psi(x) = m_e\Psi(x)$$

$$\mu_e = g_e \frac{e}{2m_e} \mathbf{S} \rightarrow g_e = 2$$

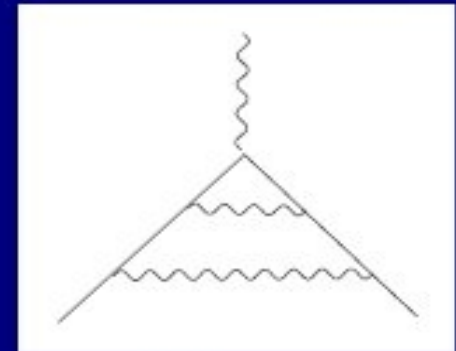
1947: $g_e \neq 2$ (!) (na poziomie promila)

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \simeq 0.00112$$

Druga pętla

$$a_e^{exp} = 0.001\,159\,652\,188\,4(43)$$

$$\begin{aligned} a_e^{SM} &= \frac{\alpha}{2\pi} \\ &- 0.32847844400 \left(\frac{\alpha^2}{\pi} \right) \longrightarrow \\ &+ 1.181234017 \left(\frac{\alpha^3}{\pi} \right) \\ &- 1.5098(384) \left(\frac{\alpha^4}{\pi} \right) \\ &+ 1.66(3) \times 10^{-12} \text{ [poprawki hadronowe i słabe]} \end{aligned}$$

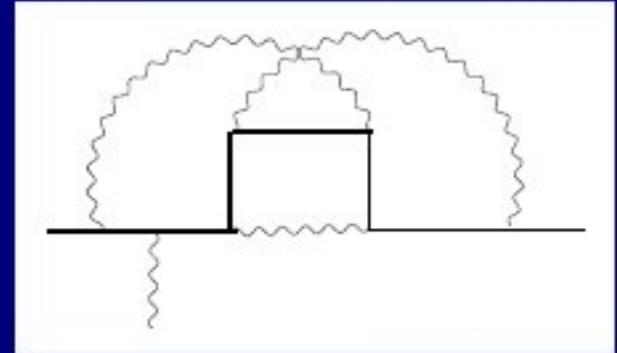


$$\alpha_{em} : 1/137.03599976(50)$$

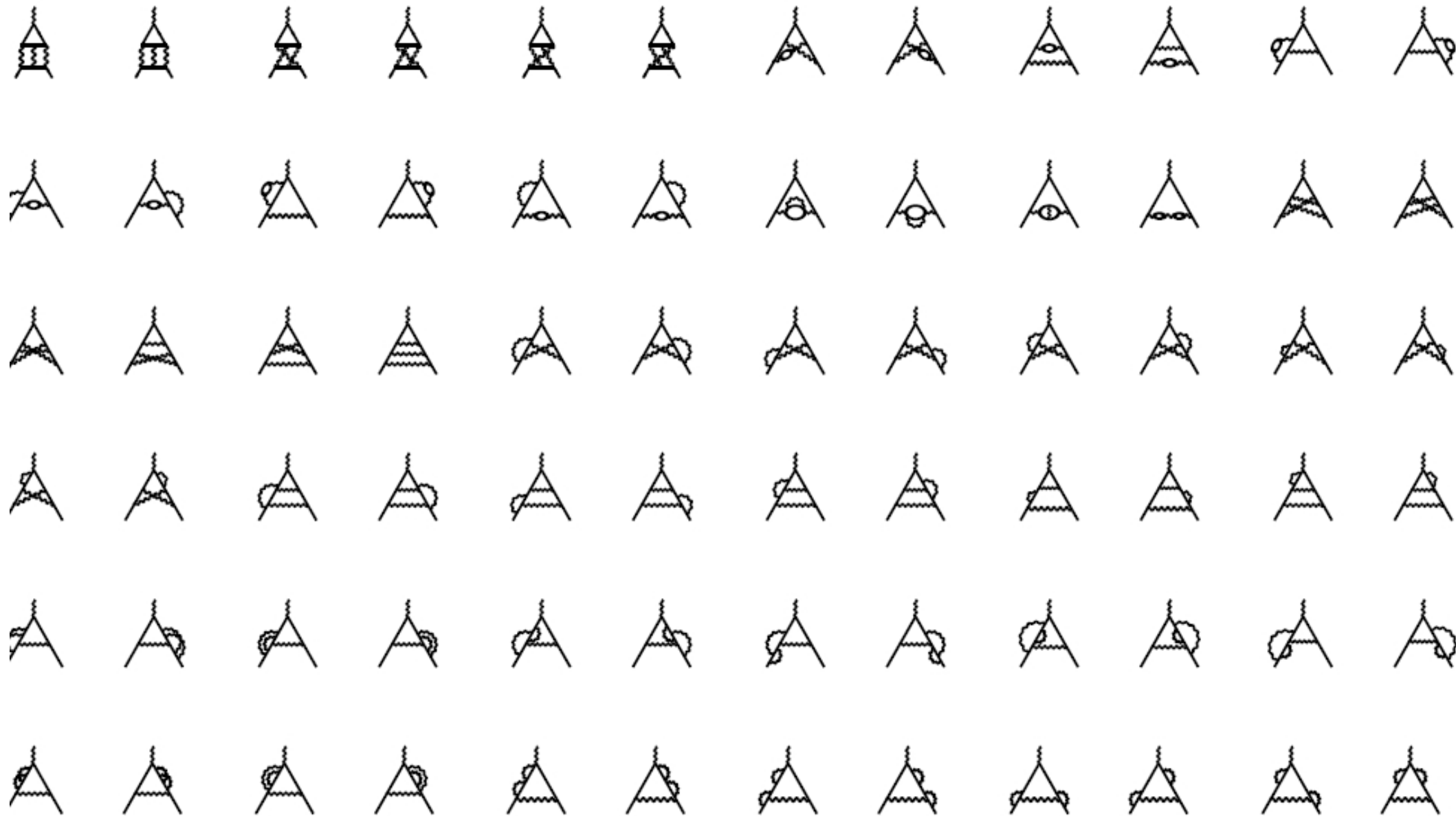
Trzecia pętla

$$a_e^{exp} = 0.001\,159\,652\,188\,4(43)$$

$$\begin{aligned} a_e^{SM} &= \frac{\alpha}{2\pi} \\ &- 0.32847844400 \left(\frac{\alpha^2}{\pi} \right) \\ &+ 1.181234017 \left(\frac{\alpha^3}{\pi} \right) \longrightarrow \\ &- 1.5098(384) \left(\frac{\alpha^4}{\pi} \right) \\ &+ 1.66(3) \times 10^{-12} \text{ [poprawki hadronowe i słabe]} \end{aligned}$$

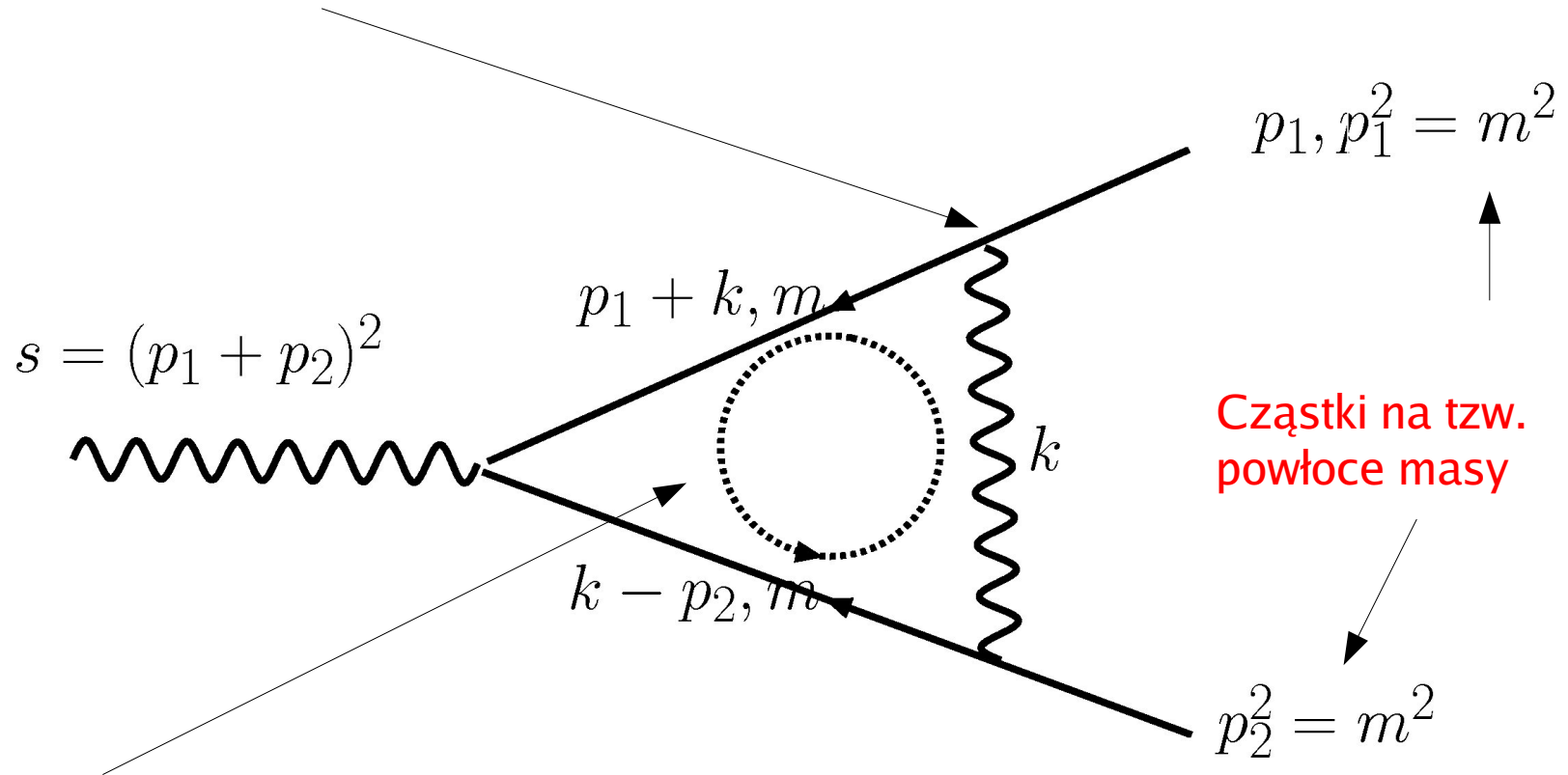


$$\alpha_{em} : 1/137.03599976(50)$$



dokładniej

W każdym wierzchołku spełniona zasada zachowania czteropędu



W pętli biegnie (cztero)pęd k , dowolny, od 0 do nieskończoności!
Jest to źródło problemów i potrzeba tzw. Renormalizacji (później)

Amplituda (na tablicy)

- Całki w 4 wymiarach są rozbieżne
- Są różne rodzaje rozbieżności, w zależności od ilości propagatorów, czy są one masywne (rozbieżności podczerwone, ultrafioletowe, kolinearne)
- Rozbieżności można usunąć np. stosując całkowanie w $d=4+\epsilon$ wymiarach, gdzie $\epsilon>0$ lub $\epsilon<0$, w zależności od typu rozbieżności

Renormalizacja

- Rozbieżności są usuwane przez tzw. renormalizację parametrów, krótko mówiąc polega ona na dopasowaniu pierwotnych parametrów modelu do fizycznych wartości (reparametryzacja), przy dopasowaniu nieskończoności są kasowane,
- Nieskończoności usuwa się poprzez renormalizację mas, sprzężeń, pól cząstek
- jeśli da się tak zrobić, że wszystkie nieskończoności można usunąć, to teoria jest renormalizowalna,

Fizyka klasyczna

- Problemy renormalizacji można już dostrzec w fizyce klasycznej
- Po pierwsze, co się dzieje, jeśli w prawie Coulomba r^{-2} dąży do zera?
- Bardziej fachowo, niech m_0 to masa “gołego” elektronu, całkowita energia, wliczając jego elektrostatyczną do pewnego promienia “ a ” wynosi

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d^3r \quad (SI)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r^2}$$

$$W = \frac{1}{32\pi^2\epsilon_0} \int \frac{e^2}{r^4} (r^2 dr 4\pi)$$

$$\begin{aligned} mc^2 &= m_0c^2 + \int_{|r|>a} d^3r \frac{e^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4} \\ &= m_0c^2 + \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

Gdy $a \rightarrow 0$, drugi człon daje nieskończoność, efekt energii własnej pola na masę elektronu jest bardzo duży, dla $a = 10^{-15} \text{ m}$, energia ta wynosi 0.7 MeV, więcej niż masa elektronu!

- Wiemy, że elektron jest punktowy na kilku rzędach wielkości mniejszych rozmiarach, a więc energia własna znacznie przewyższa masę elektronu
- W spójnej teorii klasycznej musielibyśmy więc wprowadzić strukturę elektronu (niepunktowy obiekt) i nieelektromagnetyczne siły utrzymujące całość ładunku elektronu w zwartej, skończonej przestrzeni
- **Wtedy byłoby:** $[masa\ obserwowana] = [masa\ goła] + [energia\ elektromagnetyczna + energia\ nieelektromagnetyczna] / c^2$

W kwantowej teorii pola

- podobnie: $m = m_0 + \delta m$



Tzw. kontrczłon, taki, że kasuje energię od pól wokół obiektu (obliczane poprawki) do rzeczywistej masy

Tak w wielkim uproszczeniu to działa, jeśli umiemy znaleźć takie kontrczłony w kolejnych rzędach rachunku zaburzeń, to możemy obliczyć skończone poprawki perturbacyjne

Przykład z Collinsa, hep-ph/9510276

automaty

- FeynArts (T. Hahn)
- DiaGen (M. Czakon)
- liTalc (Lorca, Riemann)
- MadGraph (U. Madison)
- Qgraph
- Diana
- ...

```
In[1]:= << FeynArts.m
```

```
FeynArts 3.2
```

```
by Hagen Eck, Sepp Kueblbeck, and Thomas Hahn
```

```
last revised 27 Mar 06
```

```
In[2]:= t12 = CreateTopologies[1, 1 → 2, ExcludeTopologies → {Internal, Tadpoles}];
```

```
In[3]:= paint12 = Paint[t12];
```

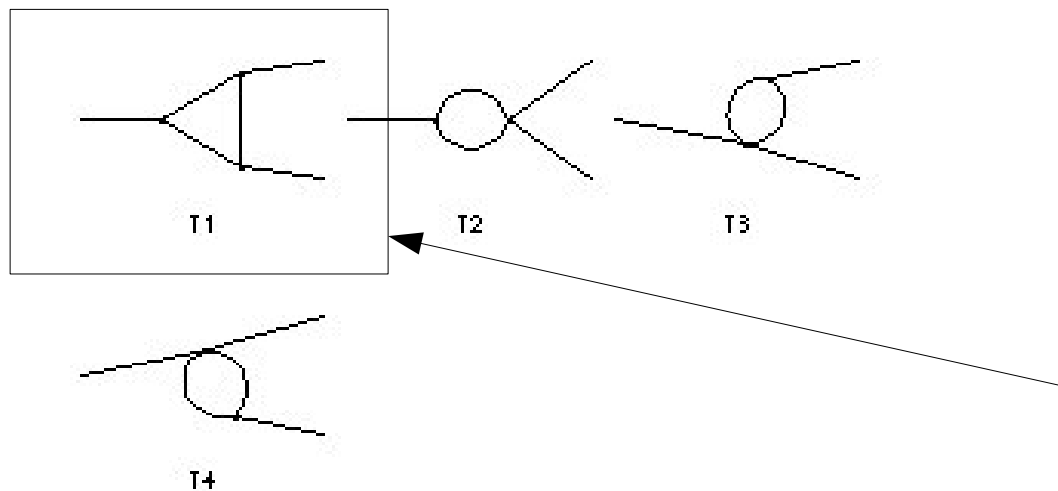
```
> Top. 1: 1 diagram
```

```
> Top. 2: 1 diagram
```

```
> Top. 3: 1 diagram
```

```
> Top. 4: 1 diagram
```

```
1 → 2
```



To nas interesuje

foton

pozytron

```
In[4]:= QED = InsertFields[t12[[1]], V[1] -> {F[2, {1}], -F[2, {1}]}, Model -> SM, InsertionLevel -> {Classes}]
```

```
initializing generic model file /home/gluza/PROGRAMS_SOURCE/feynarts/FeynArts32/Models/Lorentz.gen
```

```
> $SVMixing is OFF
```

```
generic model Lorentz initialized
```

```
initializing classes model file /home/gluza/PROGRAMS_SOURCE/feynarts/FeynArts32/Models/SM.mod
```

```
> 46 particles (incl. antiparticles) in 16 classes
```

```
> $CounterTerms are ON
```

```
> 88 vertices
```

```
> 114 counter terms of order 1
```

```
> 6 counter terms of order 2
```

```
classes model SM initialized
```

```
inserting at level(s) {Classes}
```

```
> Top. 1: 8 Classes insertions
```

```
in total: 8 Classes insertions
```

```
Out[4]= TopologyList[Model -> SM, GenericModel -> Lorentz, InsertionLevel -> {Classes}, ExcludeParticles -> {},
```

```
LastSelections -> {}, ExcludeFieldPoints -> {}, Restrictions -> {}, Process -> {V[1] -> {F[2, {1}], -F[2, {1}]}]}
```

```
Topology[1][Propagator[Incoming][Vertex[1][1], Vertex[3][4], Field[1]],
```

```
Propagator[Outgoing][Vertex[1][2], Vertex[3][5], Field[2]], Propagator[Outgoing][Vertex[1][3], Vertex[3][6], Field[3]],
```

```
Propagator[Loop[1]][Vertex[3][4], Vertex[3][5], Field[4]], Propagator[Loop[1]][Vertex[3][4], Vertex[3][6], Field[5]],
```

```
Propagator[Loop[1]][Vertex[3][5], Vertex[3][6], Field[6]] -> Insertions[Generic][
```

```
Graph[1, Generic == 1][Field[1] -> V[1], Field[2] -> -F[2, {1}], Field[3] -> F[2, {1}], Field[4] -> F, Field[5] -> F, Field[6] -> S] ->
```

```
Insertions[Classes][Graph[1, Classes == 1][Field[1] -> V[1], Field[2] -> -F[2, {1}], Field[3] -> F[2, {1}],
```

```
Field[4] -> F[2, {1}], Field[5] -> -F[2, {1}], Field[6] -> S[1]], Graph[1, Classes == 2][Field[1] -> V[1],
```

```
Field[2] -> -F[2, {1}], Field[3] -> F[2, {1}], Field[4] -> F[2, {1}], Field[5] -> -F[2, {1}], Field[6] -> S[2]]],
```

```
Graph[1, Generic == 2][Field[1] -> V[1], Field[2] -> -F[2, {1}], Field[3] -> F[2, {1}], Field[4] -> S, Field[5] -> S, Field[6] -> F] ->
```

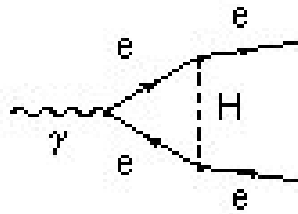
```
Insertions[Classes][Graph[1, Classes == 1][Field[1] -> V[1], Field[2] -> -F[2, {1}],
```

elektron

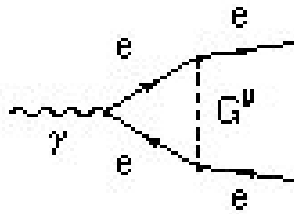
```
In[5]:= paintQED = Paint[QED, PaintLevel -> {Classes}];
```

```
> Top. 1: 8 diagrams
```

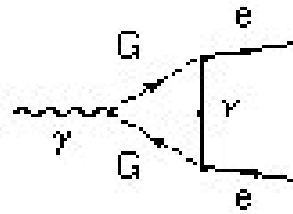
$\gamma \rightarrow e e$



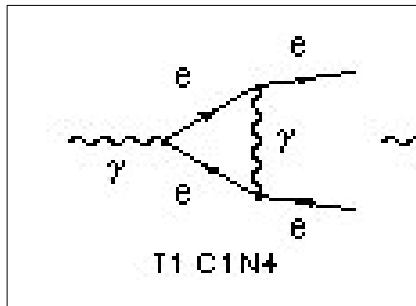
T1 C1 N1



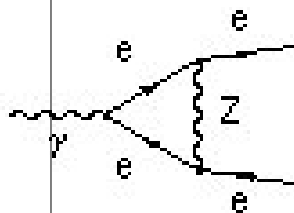
T1 C2 N2



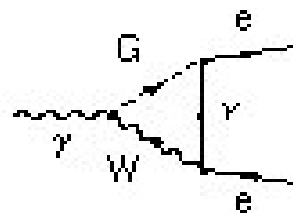
T1 C1 N3



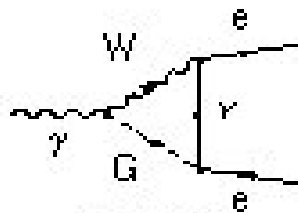
T1 C1 N4



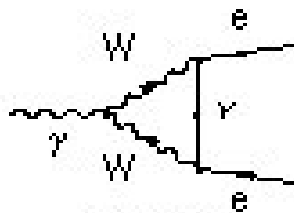
T1 C2 N5



T1 C1 N6



T1 C1 N7



T1 C1 N8

```
In[6]:= basic = Discard[QED, 1...3, 5...8];
```

```
In[7]:= CreateFeynAmp[basic]
```

```
creating amplitudes at level(s) {Classes}
```

```
> Top. 1: 1 Classes amplitude
```

```
in total: 1 Classes amplitude
```

Amplituda automatycznie



```
Out[7]= FeynAmpList[Model -> SM, GenericModel -> Lorentz, AmplitudeLevel -> {Classes}, ExcludeParticles -> {}, LastSelections -> {},  
  ExcludeFieldPoints -> {}, Restrictions -> {}, Process -> {{V[1], p1, 0} -> {{F[2, {1}], k1, ME}, {-F[2, {1}], k2, ME}}] [  
  FeynAmp[GraphID[Topology == 1, Generic == 1, Classes == 1, Number == 1], Integral[q1],  
    - $\frac{1}{16 \pi^d} \left( \bar{u}[k1, ME]. (i EL ga[Lor2]. (om_-) + i EL ga[Lor2]. (om_+)). (ME + gs[q1]). \right.$   
     $(i EL ga[Lor1]. (om_-) + i EL ga[Lor1]. (om_+)). (ME + gs[q1 - k1 - k2]). (i EL ga[Lor3]. (om_-) + i EL ga[Lor3]. (om_+)). v[k2, ME]$   
    FeynAmpDenominator  $\left[ \frac{1}{-ME^2 + (q1)^2}, \frac{1}{(q1 - k1)^2}, \frac{1}{-ME^2 + (q1 - k1 - k2)^2} \right] g[Lor2, Lor3] ep[V[1], p1, Lor1] \left. \right] ] ]$ 
```

```
In[7]:= % // InputForm
```

```
Out[7]//InputForm=  
TopologyList[Model -> SM, GenericModel -> "Lorentz", InsertionLevel -> {Classes}, ExcludeParticles -> {}, LastSelections -> {},  
  ExcludeFieldPoints -> {}, Restrictions -> {}, Process -> {V[1]} -> {F[2, {1}], -F[2, {1}]}] [  
  Topology[1][Propagator[Incoming][Vertex[1][1], Vertex[3][4], Field[1]], Propagator[Outgoing][Vertex[1][2], Vertex[3][5],  
    Field[2]], Propagator[Outgoing][Vertex[1][3], Vertex[3][6], Field[3]], Propagator[Loop[1]][Vertex[3][4], Vertex[3][5],  
    Field[4]], Propagator[Loop[1]][Vertex[3][4], Vertex[3][6], Field[5]], Propagator[Loop[1]][Vertex[3][5], Vertex[3][6],  
    Field[6]]] -> Insertions[Generic][Graph[1, Generic == 3][Field[1] -> V[1], Field[2] -> -F[2, {1}], Field[3] -> F[2, {1}],  
    Field[4] -> F, Field[5] -> F, Field[6] -> V] -> Insertions[Classes][Graph[1, Classes == 1][Field[1] -> V[1],  
    Field[2] -> -F[2, {1}], Field[3] -> F[2, {1}], Field[4] -> F[2, {1}], Field[5] -> -F[2, {1}], Field[6] -> V[1]]]]]
```